АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

С. А. БОГОМОЛОВ, М. Е. ВОЛОКОБИНСКИЙ, З. З. ВУЛИХ
и Б. И. КАЖДАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

ВЫПУСК 3

Бесконечные ряды

Функции от нескольких переменных

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1933

АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

С. А. БОГОМОЛОВ, М. Е. ВОЛОКОБИНСКИЙ, З. З. ВУЛИХ
и Б. И. КАЖДАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

ВЫПУСК 3

Бесконечные ряды

Функции от нескольких переменных

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1933

Ответственный редактор *Краз, Г. Я.*
Технический редактор *Позоева, Н. М.*
Поступило в производство 14/I 1933 г.
Вышло в свет в апреле 1933 г.
Колич. печ. знаков на листе 30.000.
Бумага печ. 72 × 105.

Ленгорлит № 2116. Изд. Арт. ак. № 21 Заказ № 618. Тираж 2.500 экз. 11⅝ п. л.

ЛОЦТ ГККАМ им. Клима Ворошилова (Ленинград, пл. Урицкого, 10.

П р е д и с л о в и е.

В настоящем выпуске § § 37 - 41 написаны С.А. Богомоловым, а § § 42 - 45 - Б.И. Кахданом.

Пунктирная линия с левой стороны страницы, равно как и некоторый сдвиг левого края страницы - указывает на мелкий шрифт.

§ 37. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ.

I. Предварительные замечания.

Из всех известных нам функций простейшей является целый многочлен:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

где $a_0, a_1, \ldots a_n$ - постоянные коэффициенты, n - целое положительное число, x - переменная независимая.

Простота эта выражается в том, что по данному x значение многочлена находится с помощью конечного числа основных алгебраических действий. Для других функций дело обстоит не так просто; если, например, возьмем показательную функцию:

$$e^x,$$

то само число e есть число иррациональное, для которого мы еще не имеем удобного способа приближенного вычисления, и вычисление значения показательной функции для любого значения x представляет значительные трудности.

Читатель может быть скажет, что вероятно кто-нибудь составил соответствующие таблицы. Да, в нашем распоряжении имеется много различных таблиц; но, во-первых, надо знать, как составлялись эти таблицы, а во-вторых, командир-инженер может встретиться в своей исследовательской работе с такими функциями, для которых таблиц еще не составлено. Поэтому необходимо ознакомиться с одним из самых употребительных приемов для приближенного вычисления значений функций.

Основная мысль этого способа состоит в том, что вычисление данной функции сводят к вычислению целого многочлена. Но поставить знак равенства, например, между

e^x и целым многочленом конечно нельзя: производная от e^x всегда будет e^x, а при дифференцировании многочлена, степень его понижается, и начиная с известного порядка все его производные равны 0. Выйти из этого затруднения стараются тем путем, что берут многочлен с бесконечным числом членов, т.е. выражают исследуемую функцию бесконечным рядом, как например:

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

Оказывается, что это равенство может иметь вполне точный и определенный смысл; какой именно,- увидим ниже. Имея точное равенство, можно перейти к приближенным, удерживая только конечное число членов и оценивая совершаемую при этом ошибку.

С разложением функций в бесконечные ряды мы сплошь и рядом встречаемся в наших специальных дисциплинах. Так, в курсе "Внутренней балистики" (курс проф.Граве, ч.I, стр.78) требуется разложить в ряд функцию

$$\frac{1-a^{-x}}{x};$$

в курсе "Теории ошибок" (курс Гельвиха, ч.I, стр.31-32) дело идет о разложении в ряд интеграла:

$$\int_0^{\alpha} e^{-t^2} dt,$$

который не берется в конечном виде. Надо заметить, что разложение в ряд служит не только для целей приближенного вычисления, но также - для изучения свойств более сложных функций.

Даже в курсе элементарной алгебры читатель встречался с бесконечным рядом; вспомните формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + aq^{n+1} + \cdots.$$

По этой формуле, между прочим, можно вычислить величину периодической десятичной дроби, которая, как всякая бесконечная десятичная дробь, есть не что иное, как сумма членов некоторого бесконечного ряда. Возьмем, например, периодическую дробь:

$$0,3333\ldots\ldots;$$

ее величина равна сумме ряда:

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots\cdots;$$

здесь

$$a=\frac{3}{10} \quad и \quad q=\frac{1}{10},$$

так что сумма прогрессии равна:

$$\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{1}{3},$$

как и должно быть.

Для того, чтобы уметь пользоваться бесконечными рядами, нам надо изучить их теорию. Возникают вопросы: какой смысл имеет сумма бесконечного числа слагаемых? Всегда ли она имеет определенный смысл? Какую делаем ошибку, если удерживаем конечное число членов ряда, а остальные отбрасываем? и т.д.

Вот настоящий параграф и посвящается теории рядов; в дальнейших пойдет речь о разложении функций в ряды и о приближенных формулах.

2. Основные понятия и теоремы.

Пусть задан по определенному закону бесконечный ряд чисел:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,\ \ldots$$

Указанный закон обычно выражается в том, что так называемый "общий член" ряда u_n задается, как функция значка n (дающего номер члена).

Так, например, если:
$$u_n=\frac{1}{n},$$
то, давая числу n последовательно значения натурального ряда, получим следующий бесконечный ряд:
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots .$$

Если дано, что:
$$u_n=\frac{1}{n.(n+1)},$$
то этот закон определяет такой ряд:
$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3.4}, \ldots . \frac{1}{n\cdot(n+1)}, \ldots \ldots$$

Иногда выписывают только несколько первых членов ряда, и читатель должен сам составить выражение для его общего члена, предполагая, что закон составления первых членов остается в силе и для дальнейших. Так, например, пусть дан ряд:
$$x, -\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, -\frac{x^4}{4}, \ldots ;$$
вглядываясь внимательно в выражения данных нам членов ряда, приходим к такой формуле для его общего числа:
$$u_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}.$$

Этот пример показывает, что члены ряда могут быть функциями от некоторого аргумента x; впоследствии мы будем иметь дело именно с такими рядами.

Основной вопрос, который ставится относительно всякого ряда, это - вопрос о его сходимости.

Пусть задан ряд:
$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots ;$$

составим сумму его n первых членов, которую назовем "частичной суммой" и обозначим через S_n:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

Если мы будем увеличивать число слагаемых n, то S_n станет конечно величиной переменной; возникает вопрос о ее пределе, когда $n \to \infty$.

Возможны 2 случая:

I) S_n стремится к определенному пределу S:

$$\lim \{S_n\}_{n\to\infty} = S;$$

тогда наш ряд называется <u>сходящимся</u>, а S - его <u>суммой</u>, и в этом случае пишут:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

2) S_n не имеет предела (эта переменная или безгранично растет, или колеблется, не приближаясь ни к какому значению); тогда данный ряд называется <u>расходящимся</u>, и, конечно, нельзя говорить о его сумме.

Из сказанного уже ясно, что для нас могут иметь значение лишь сходящиеся ряды, а потому вопрос о сходимости всегда приходится ставить.

Поясним данные определения примерами.

<u>Пример I.</u> Рассмотрим с изложенной точки зрения бесконечную геометрическую прогрессию, положив для простоты, что ее первый член равен I:

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots\ q^n,\ \ldots\ldots \quad (1)$$

Составляем частичную сумму:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1};$$

по известной формуле:

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

или

$$S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Далее увеличиваем n до бесконечности и ставим вопрос о $\lim S_n$; применяя основные теоремы о пределах, находим:

$$\lim s_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \cdot \lim q^n.$$

В § 3 было доказано, что если $|q|<1$, то этот последний предел $=0$; следовательно: если $|q|<1$, то ряд (I) будет сходящимся, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$, так что получается известная формула для суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots$$

Если же $|q|>1$, то как мы видели в том же § 3, величина q^n становится бесконечно-большой вместе с n; то же самое произойдет и с частичной суммой S_n, ряд (I) будет расходящимся, и нельзя говорить о сумме членов бесконечной возрастающей геометрической прогрессии.

Рассмотрим ради полноты еще случаи, когда $|q|=1$.

Если $q=+1$, то:

$$S_n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

и очевидно беспредельно растет вместе с n.

Если же $q=-1$, то:

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots ;$$

здесь имеем попеременно, что сумма четного числа членов равна 0, а нечетного - равна I; следовательно, о существовании предела говорить не приходится.

Итак, только при:

$$|q|<1$$

ряд (I) будет сходящимся

Пример 2. Дан ряд:

$$\frac{1}{1.2},\ \frac{1}{2.3},\ \frac{1}{3.4},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{n(n+1)}\ldots\ldots$$

Составляем S_n:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\ ;$$

так как всегда имеем:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\ ,$$

то S_n можно переписать так:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right);$$

или:

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (*)$$

Теперь уже легко заключить, что:

$$\lim\left[S_n\right]_{n\to\infty}=1;$$

следовательно, данный ряд - сходящийся и его сумма равна I:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1.$$

Если бы мы удержали только n первых членов этого ряда, то, как показывает формула (*), их сумма отличалась бы от I на величину равную:

$$\frac{1}{n+1};$$

таким образом, взяв 99 членов, мы получили бы сумму ряда только с точностью до 0,01; это говорит, что наш ряд принадлежит к числу так называемых "медленно сходящихся" рядов.

В рассмотренных примерах мы довольно легко справились с задачей благодаря тому, что нам удалось получить простое выражение для S_n. Но это далеко не всегда возможно; поэтому надо найти такие "признаки сходимости" ряда, которые не требовали бы вычисления S_n. В этом и заключается основная задача теории рядов; она даст содержание следующим пунктам, а в настоящем пункте мы докажем лишь 2 общих теоремы.

Теорема I. Для сходимости ряда необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} [u_n] = 0$$

Пусть дан ряд:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n, \ldots;$$

составим для него частичные суммы S_{n-1} и S_n:

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Если ряд сходится, то при безграничном возрастании n, обе частичные суммы должны стремиться к одному и тому же пределу:

$$\lim_{n\to\infty} [S_{n-1}] = S \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} [S_n] = S;$$

отсюда следует, что:

$$S_{n-1} = S + \alpha \quad \text{и} \quad S_n = S + \beta,$$

где α и β - бесконечно малые.

Составляя разность:

$$S_n - S_{n-1} = \beta - \alpha,$$

убеждаемся, что она тоже будет величиной бесконечно малой; с другой стороны, эта разность равна:

$$S_n - S_{n-1} = u_n,$$

откуда и вытекает справедливость нашей теоремы.

Доказанная теорема дает необходимый признак сходимости, так что если он не выполняется, то ряд наверное будет расходящимся; так, ряды:

$$1, 2, 3, 4, \ldots n, \ldots$$

$$1, q, q^2, q^3, \ldots q^n, \ldots \text{ при } |q| \geqslant 1$$

будут расходящимися, так как их общие члены не стремятся к 0 при безграничном возрастании n.

Но будучи необходимым, этот признак не является достаточным, т.е. его выполнение не влечет за собой непременно сходимости ряда. Мы приведем сейчас пример, когда рассматриваемое условие выполнено, а ряд расходится.

Возьмем так называемый "гармонический ряд":

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots;$$

легко видеть, что здесь:

$$u_n = \frac{1}{n} \text{ и } \lim [u_n]_{n \to \infty} = 0$$

между тем этот ряд будет расходящимся. Для доказательства составим частичную сумму и сгруппируем ее члены особым образом:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\} + \left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right\} + \ldots;$$

именно, знаменатель последнего члена в каждой группе равен степени 2-х, а знаменатель первого члена равен предыдущей степени 2-х, увеличенной на I. В правой части последнего равенства имеем конечное число членов;

число членов n можно выбрать так, что там будет заключаться целое число групп. Теперь в каждых скобках заменим все дроби последней дробью, отчего правая часть уменьшится:

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right\} + \left\{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right\} + \cdots$$

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\cdots ;$$

если таких групп было K, то:

$$S_n > 1 + \frac{K}{2}.$$

Но число K можно увеличивать безгранично, так что и S_n возрастает безгранично (хотя и чрезвычайно медленно), и ряд будет расходящимся.

<u>Теорема 2. При исследовании сходимости ряда, можно отбросить конечное число его начальных членов.</u>

Другими словами, докажем, что ряды:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \ldots u_n, \ldots$$

$$u_k, u_{k+1}, \ldots u_n, \ldots$$

(где k есть определенное постоянное число) будут или оба сходящимися, или оба расходящимися.

Действительно, частичные суммы этих рядов отличаются на величину:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} = A;$$

а так как A есть вполне определенная постоянная величина, то если одна из частичных сумм имеет предел, и другая тоже будет иметь предел (хотя и отличный от первого). Эта теорема позволит вносить в дальнейшее изложение некоторое упрощение:вместо того,чтобы говорить,что известное условие выполняется,начиная с известного члена ряда,можно считать,что оно удовлетворяется уже начиная с I-го члена.

Примеры для упражнения.

I) Написать ряд по его общему члену:

а) $u_n=\frac{n}{2^n}$

б) $u_n=\frac{n+1}{2n+1}$

в) $u_n=\frac{x^n}{1.2.3...n}$

2) Найти обще члены следующих рядов:

а) I,3,9,27,......

б) $1, 2x, 3x^2, 4x^3, \dots$

в) $\frac{x}{2}, \frac{x^2}{1+\sqrt{2}}, \frac{x^3}{1+\sqrt{3}}, \frac{x^4}{1+\sqrt{4}}, \dots$

3) Доказать расходимость рядов 2а и 2б (при $|x|\geqslant 1$).

3. Ряды с положительными членами. Переходя к выводу достаточных признаков сходимости, начнем с рядов, у которых все члены имеют один и тот же знак; так как знак минус можно было бы вынести за скобки в выражениях для частичных сумм, то можно будет ограничиться рядами с положительными членами.

Итак, имеем ряд:

$$u_1, u_2, u_3, \dots u_n, \dots,$$

где $u_n>0$ при всяком n.

Составим частичную сумму:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n;$$

с возрастанием числа n, частичная сумма будет всегда возрастать, ибо к ней будут прибавляться положительные слагаемые. Теперь возможны только 2 случая: I) или S_n растет беспредельно, и тогда данный ряд будет очевидно расходящимся; 2) или S_n есть величина ограниченная, т.е. существует такое число:

что при всяком n имеем:

$$s_n < N$$

(с ограниченными величинами мы имели дело в § 3). В таком случае данный ряд будет сходящимся.

В самом деле, частичная сумма s_n все время возрастает и всегда остается меньше некоторого постоянного числа; тогда на основании одного из признаков существования предела (см. § 13, где речь шла о числе e), она имеет определенный предел.

Это замечание позволит вывести два признака сходимости для рядов с положительными членами; эти признаки чаще всего применяются на практике.

Первый признак сходимости основан на сравнении 2 рядов и выражается следующей теоремой.

Теорема 3. Даны 2 ряда с положительными членами:

(1) . . . $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$

(2) . . . $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n, \ldots$;

если члены 1-го ряда соответственно меньше членов 2-го ряда и 2-й ряд сходящийся, то и 1-й ряд будет сходящимся; если же члены 1-го ряда соответственно больше членов 2-го ряда, и 2-й ряд - расходящийся, то и 1-й ряд будет расходящимся. Обозначим частичные суммы наших рядов соответственно через:

$$s_n \text{ и } \sigma_n.$$

В 1-м случае второй ряд сходится; следовательно его частичная сумма σ_n стремится к определенному пределу σ; но так как она при этом все время возрастает, то имеем неравенство: $\sigma_n < \sigma$.

Далее по условию теоремы:

$$u_1 < v_1; \quad u_2 < v_2; \quad \ldots u_n < v_n,$$

откуда:

$$s_n < \sigma_n;$$

а потому и подавно:

$$s_n < \sigma.$$

Но, как было раз'яснено, в таком случае первый ряд будет тоже сходящимся, что и требовалось доказать.

Во 2-м случае второй ряд расходится, так что σ_n есть величина бесконечно-большая. По условиям теоремы теперь имеем:

$$u_1 > v_1; \quad u_2 > v_2; \; \ldots \; u_n > v_n,$$

откуда:

$$s_n > \sigma_n;$$

а потому s_n тоже растет беспредельно, и первый ряд будет расходящимся, что и требовалось доказать.

ПРИМЕЧАНИЕ. Мы допустили что неравенства между членами наших рядов имеют место, начиная с первых членов; если бы они получали силу только начиная с известного места, то на основании теоремы 2 вопрос свелся бы к предыдущему. Заметим также, что если для отдельных членов вместо неравенства будет иметь место равенство, то это не отразится существенно на приведенном доказательстве.

Пример I. Будет ли сходящимся ряд:

$$1, \; q\cos^2\varphi, \; q^2\cos^2 2\varphi, \; q^3\cos^2 3\varphi, \ldots,$$

где число q удовлетворяет условию:

$$0 < q < 1 ?$$

Члены нашего ряда - положительны и вообще меньше членов такого ряда:

$$1, \; q, \; q^2, \; q^3, \ldots;$$

а так как последний ряд - сходящийся, то и данный ряд будет сходящимся.

Пример 2. Ряд с положительными членами:

$$1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{4}},\ \ldots \frac{1}{\sqrt{n}},\ \ldots.$$

будет расходящимся, так как его члены соответственно больше членов гармонического ряда.

Второй признак сходимости, наиболее часто применяемый, носит название признака Даламбера; сущность его изложена в следующей теореме. Пусть дан ряд с положительными членами:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots u_n,\ \ldots;$$

возьмем его общий член u_n, выпишем следующий за ним член u_{n+1} и составим отношение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n};$$

далее будем искать предел этого отношения при $n\to\infty$.

Теорема 4. Если предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ равен α:

$$\lim\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n\to\infty} = \alpha,$$

то при $\alpha<1$ ряд будет сходящимся, а при $\alpha>1$ расходящимся.

Пусть $\alpha<1$; возьмем какое-нибудь число q, удовлетворяющее условию:

$$\alpha<q<1.$$

Если отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к своему пределу оставаясь все время меньше его, то и подавно:

$$(*)\ \ldots\ \frac{u_{n+1}}{u_n}<q.$$

Если же это отношение получает значения $>\alpha$, то в процессе его изменения разность:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-\alpha,$$

будучи бесконечно-малой, станет наконец меньше разности:

$$q-\alpha;$$

это значит, что наше отношение по своей величине будет заключаться между α и q, а потому неравенство (*) и здесь будет выполнено.

Итак, начиная с некоторого (достаточно большого) значения n, будет иметь место неравенство:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q.$$

Пусть это выполняется, начиная со значения:

$$n = k;$$

давая числу n значения:

$$n = k,\ k+1,\ k+2, \ldots\ldots$$

получаем ряд неравенств:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < q$$

$$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < q$$

$$\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < q$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

откуда:

$$u_{k+1} < u_k \cdot q$$
$$u_{k+2} < u_{k+1} \cdot q < u_k \cdot q^2$$
$$u_{k+3} < u_{k+2} \cdot q < u_k \cdot q^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Таким образом, члены ряда:

$$u_{k+1},\quad u_{k+2},\quad u_{k+3}, \ldots\ldots$$

будут соответственно меньше членов такого ряда:

$$u_k q,\ u_k\cdot q^2,\ u_k\cdot q^3, \dots\dots\dots$$

Но 2-й ряд сходится, ибо это есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; следовательно, по теореме 3 и I-й ряд будет сходящимся. Наконец, этот последний ряд отличается от данного ряда только тем, что в нем отброшено конечное число начальных членов; тогда теорема 2 говорит, что данный ряд будет в свою очередь сходящимся. Итак, I-я часть теоремы - доказана; переходим ко 2-й.

Если

$$\lim\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n\to\infty} = \alpha > 1,$$

то неограниченно приближаясь к α в процессе своего изменения, наше отношение само станет больше I; так что, начиная с некоторого значения n, будем иметь неравенство:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Отсюда находим:

$$u_{n+1} > u_n,$$

т.е. - члены ряда идут возрастая, и необходимый признак сходимости (теорема I) здесь не выполняется; а потому данный ряд - расходящийся.

ЗАМЕЧАНИЕ. Остается еще случай, когда:

$$\lim\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n\to\infty} = 1$$

Если при этом в процессе своего изменения отношение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ всегда} > 1,$$

то: $$u_{n+1} > u_n,$$

и ряд по предыдущему будет расходящимся. Если же наше отношение остается <1, то мы ничего не можем заключить о сходимости ряда. Это так называемый "сомнительный случай", когда для решения вопроса о сходимости требуется дополнительное исследование.

Поясним признак Даламбера примерами.

Пример I. Будет ли сходящимся ряд:

$$1, 2\cdot\frac{1}{3},\ 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3, \ldots\ ?$$

Здесь имеем:

$$u_n = n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$u_{n+1} = (n+1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right] = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{3};$$

так как предел этого отношения <1, то данный ряд - сходящийся.

Пример 2. Дан ряд:

$$1, \frac{a}{1}, \frac{a^2}{1.2}, \frac{a^3}{1.2.3}, \frac{a^4}{1.2.3.4}, \ldots,$$

где a есть положительное число; спрашивается, при каких значениях a этот ряд будет сходящимся?

Нам будет удобнее иметь дело с рядом, в котором отброшен I-й член, т.е. - с рядом:

$$\frac{a}{1}, \frac{a^2}{1.2}, \frac{a^3}{1.2.3}, \frac{a^4}{1.2.3.4}, \ldots;$$

на основании теоремы 2 это вполне возможно.

Тогда для 2-го ряда имеем:

$$u_n = \frac{a^n}{1.2.3\ldots n}$$

$$u_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$$

$$\lim \left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n\to\infty} = a \cdot \lim \left[\frac{1}{n+1}\right]_{n\to\infty} = 0;$$

следовательно, данный ряд будет сходящимся при всяком конечном значении a (и притом - положительном).

Советуем читателю обратить внимание на этот ряд, имеющий большое значение в анализе; от последнего ограничения мы скоро избавимся.

Пример 3. Возьмем гармонический ряд:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots \frac{1}{n},\ \ldots;$$

здесь имеем:

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim \left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n\to\infty} = \lim \left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right]_{n\to\infty} = 1,$$

причем отношение всегда < 1.

Это сомнительный случай, и признак Даламбера ничего здесь не дает; выше другим путем мы убедились, что ряд - расходящийся.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда:

$$1,\ \frac{1}{2^a},\ \frac{1}{3^a},\ \frac{1}{4^a},\ \ldots\ldots,$$

где $a>0$.

Применяем признак Даламбера:

$$u_n=\frac{1}{n^a}$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^a}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^a$$

$$\lim\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n\to\infty}=1;$$

получается снова сомнительный случай. Однако можно решить вопрос другим путем.

При $a=1$ получается гармонический ряд, который расходится; при $a<1$, члены данного ряда будут больше членов гармонического ряда, а потому (теорема 3) данный ряд будет расходящимся.

Наконец, при $a>1$ наш ряд будет сходящимся. Для доказательства сгруппируем особым образом члены частичной суммы:

$$s_n=1+\left\{\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}\right\}+\left\{\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\frac{1}{7^a}\right\}+$$
$$+\left\{\frac{1}{8^a}+\frac{1}{9^a}+\cdots+\frac{1}{15^a}\right\}+\cdots \text{ до конца;}$$

в каждых скобках заменим все дроби первой, отчего правая часть увеличится:

$$s_n<1+\left\{\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^a}\right\}+\left\{\frac{1}{4^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{4^a}\right\}+\cdots$$

или:

$$s_n<1+\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{4^{a-1}}+\frac{1}{8^{a-1}}+\cdots$$

$$s_n<1+\frac{1}{2^{a-1}}+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^3+\cdots$$

В правой части стоит бесконечная геометрическая прогрессия; если

$$a>1, \quad \text{то} \quad a-1>0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2^{a-1}}<1,$$

т.е. у нас будет убывающая прогрессия. Вычисляя ее сумму, найдем:

$$S_n<\frac{2^{a-1}}{2^{a-1}-1},$$

а если S_n остается меньше некоторого постоянного числа, то данный ряд будет сходящимся.

После того, как мы убедились в сходимости ряда, возникает вопрос о нахождении его суммы; это - задача гораздо более трудная, и мы не всегда можем ее решить. Однако всегда можно вычислить приближенно сумму ряда с желаемой точностью.

Пусть дан сходящийся ряд:

$$u_1, \; u_2, \; u_3, \; \ldots \; u_n, \ldots$$

и пусть его сумма $= S$.

Тогда можем написать:

$$S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots$$

или:

$$S=S_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

Обозначая сумму сходящегося ряда

$$u_{n+1}, \; u_{n+2}, \; u_{n+3}, \; \ldots$$

(а сходится он на основании теоремы 2) через R_n:

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots,$$

предыдущее равенство можно переписать следующим образом:

$$S=S_n+R_n.$$

Это R_n называется " остатком ряда"; так как:

$$\lim s_n = s,$$

то

$$(1) \ldots\ldots s - s_n = R_n$$

будет величиной бесконечно-малой; другими словами:

$$\lim_{n\to\infty} [R_n] = 0.$$

Равенство (I) говорит, что если приближенно положим:

$$(2) \ldots\ldots s \approx s_n,$$

то ошибка этого равенства будет равна R_n; а так как $R_n \to 0$, то всегда можно взять n настолько большим, чтобы R_n было сколь-угодно малым. Следовательно, можно вычислить s с произвольной степенью точности; остается только вопрос о том, как получить более удобное выражение для R_n, чтобы суметь оценить ошибку.

Покажем на примере, как этот вопрос иногда решается для ряда с положительными членами.

Дан сходящийся ряд:

$$1, \frac{a}{1}, \frac{a^2}{1.2}, \frac{a^3}{1.2.3}, \ldots \frac{a^n}{1.2.3\ldots n}, \ldots$$

(см. пример 2); для вычисления его суммы приближенно положим:

$$s \approx 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

тогда ошибка этого приближенного равенства равна:

$$R_n = \frac{a^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{a^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} + \cdots\cdots$$

Преобразуем это выражение:

$$R_n = \frac{a^n}{1.2.3\ldots n}\left\{1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right\};$$

если в знаменателях дробей, стоящих в скобках, все множители заменим на $(n+1)$, то правая часть увеличится:

$$R_n < \frac{a^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \left\{ 1 + \frac{a}{n+1} + \left(\frac{a}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{a}{n+1}\right)^3 + \cdots \right\};$$

но теперь в скобках стоит бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, а потому:

$$R_n < \frac{a^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{n+1}}$$

или окончательно:

$$(3)\ldots\; R_n < \frac{a^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{n+1}{n+1-a}.$$

Если теперь требуется, чтобы ошибка приближенного равенства (2) была меньше данного числа $\delta > 0$, т.е. должно быть:

$$R_n < \delta,$$

то число n надо подобрать так, чтобы правая часть неравенства (3) была $< \delta$; ниже мы воспользуемся этим при вычислении числа e.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если при пользовании признаком Даламбера мы убедились, что начиная с $n = k$ имеет место неравенство:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q < 1,$$

то положив:

$$S \approx S_k$$

найдем для R_k выражение:

$$R_k = u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots$$

Далее имеем (как выше):

$$u_{k+2} < u_{k+1} \cdot q; \quad u_{k+3} < u_{k+1} \cdot q^2; \ldots,$$

$$R_k < u_{k+1}\left\{1+q+q^2+q^3+\cdots\right\}$$

$$R_k < \frac{u_{k+1}}{1-q}.$$

Этой формулой можно пользоваться для оценки ошибки.

Примеры для упражнения.

1) Будут ли сходящимися ряды:

а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \ldots.$

б) $\frac{1.2}{10}, \frac{1.2.3}{10^2}, \frac{1.2.3.4}{10^3}, \ldots.$

в) $\frac{1}{3}, \frac{1.3}{3.6}, \frac{1.3.5}{3.6.9}, \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}, \ldots.$

Указание: $u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{3.6.9\ldots3n}$.

2) Считая x числом положительным, определить, при каких именно значениях x будут сходящимися ряды:

а) $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \ldots.$

Ответ: $0 < x < 1$.

б) $x,\ 2x^2,\ 3x^3,\ 4x^4, \ldots.$

Ответ: $0 < x < 1$.

в) $\frac{x}{2.3}, \frac{x^2}{4.5}, \frac{x^3}{8.9}, \frac{x^4}{16.17}, \ldots.$

Указание: $u_n = \frac{x^n}{2^n(2^n+1)}$

Ответ: $0 < x < 4$.

г) $x, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^5}{1.2.3.4.5}, \ldots.$

Ответ: при всяком $x > 0$.

4. Знакопеременный ряд.

Перейдем теперь к рядам, члены которых могу быть как положительными, так и отрицательными числами; сначала остановимся на том частном и наиболее часто встречающемся случае, когда члены ряда попеременно положительны и отрицательны (два соседних члена всегда имеют разные знаки); такой ряд называется <u>знакопеременным</u>.

Будем по-прежнему все числа u_n считать положительными, и снабдив их различными знаками, получим знакопеременный ряд в таком виде:

$$u_1,\ -u_2,\ u_3,\ -u_4,\ \ldots\ -u_{2n},\ u_{2n+1},\ \ldots.$$

Для знакопеременного ряда имеет место следующий признак сходимости Лейбница:

<u>Теорема 5. Знакопеременный ряд будет сходящимся, если начиная с некоторого места, его члены постоянно и неопределенно убывают по абсолютной величине.</u> Другими словами, нам дается, что:

$$u_{n+1} < u_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left[u_n\right] = 0.$$

Приступая к доказательству, можно на основании теоремы 2 допустить, что убывание членов ряда начинается с его 1-го члена, т.е.:

$$(*)\ldots\ u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_{2n} > u_{2n+1} >$$

Возьмем частичную сумму четного числа членов S_{2n} и сгруппируем ее слагаемые попарно:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n});$$

так как все наши разности - положительны, то: $S_{2n} > 0$ возрастает с возрастанием n.

Сочетаем теперь члены этой суммы иначе, а именно: отделим ее первый и последний члены, а остальные соединим попарно; таким образом получим:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n};$$

здесь тоже все разности положительны, а потому всегда будет:

$$s_{2n} < u_1.$$

Если же переменная s_{2n} все время возрастает и всегда остается меньше определенного постоянного числа, то s_{2n} имеет предел; обозначим этот предел через S, так что:

$$\lim \left[s_{2n} \right]_{n \to \infty} = S$$

Рассмотрим теперь частичную сумму нечетного числа членов s_{2n+1}. Легко видеть, что:

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1},$$

откуда:

$$\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} + \lim u_{2n+1}$$

при $n \to \infty$. Но первый предел правой части $= S$, а второй по условию теоремы $= 0$, так что:

$$\lim \left[s_{2n+1} \right]_{n \to \infty} = S.$$

Следовательно, частичная сумма всегда стремится к одному и тому же пределу, а это и доказывает сходимость ряда.

Пример. Дан знакопеременный ряд:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\ldots;$$

так как его члены по абсолютной величине постоянно убывают, и общий член:

$$u_n = \pm \frac{1}{n}$$

стремится к 0 при $n \to \infty$, то данный ряд - сходящийся.

Знакопеременный ряд имеет то преимущество, что существует простое правило для оценки ошибки приближенного равенства: $S \approx s_n$.

Наш знакопеременный ряд был записан таким образом, что члены с нечетными значками имели знак   а с четными знак –; поэтому его n-ый член можно обозначить через:

$$(-1)^{n-1} \cdot u_n ,$$

и наше приближенное равенство подробнее запишется так:

$$s \approx u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot u_n .$$

Тогда остаток ряда R_n, дающий ошибку этого равенства, будет равен сумме сходящегося ряда:

$$R_n = (-1)^n \cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot u_{n+2} + (-1)^{n+2} \cdot u_{n+3} + \cdots$$

или:

$$R_n = (-1)^n \cdot \left\{ u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots \right\} .$$

Теорема 6. В случае знакопеременного ряда, ошибка приближенного равенства:

$$s \approx s_n$$

будет по абсолютной величине меньше первого из отброшенных членов.

Действительно, из предыдущего выражения для R_n имеем:

$$|R_n| = |u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots| ;$$

относительно суммы, стоящей в правой части, подобно предыдущему, докажем, что она, во-первых, положительна, а во-вторых - меньше своего I-го члена. Таким образом, получаем:

$$|R_n| < u_{n+1} ,$$

что и требовалось доказать.

Так, например, если пожелаем вычислить сумму приведенного выше знакопеременного ряда и положим:

$$s \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n},$$

то для этого приближенного равенства будем иметь:

$$|ошибка| < \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, если бы понадобилось вычислить S с точностью до 0,01, то пришлось бы взять $n=99$. Данный ряд тоже является медленно сходящимся; ниже получим ряды, более удобные для вычисления.

Примеры для упражнения.

Будут ли сходящимися ряды:

1) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3},\ -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4},\ \dots$

2) 1, - 2, 3, - 4,.....

3) $\frac{1}{\lg 2},\ -\frac{1}{\lg 3},\ \frac{1}{\lg 4},\ -\frac{1}{\lg 5},\ \dots$

4) $2,\ -\frac{2^2}{2},\ \frac{2^3}{3},\ -\frac{2^4}{4},\ \dots$

5. Ряды с членами разных знаков (вообще). В этом пункте мы становимся на более общую точку зрения: члены ряда меняют знаки, но не обязательно по очереди; например, такой ряд:

$$1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{10},\ \dots$$

Конечно, все доказанное для такого ряда будет верно и для его частного случая - знакопеременного ряда (но не обратно).

Теорема 7. Ряд с членами разных знаков будет сходящимся, если сходимостью обладает ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Пусть дан ряд:

$$u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,;\ \dots\ u_n\,,\ \dots\,,\quad (1)$$

где числа u_n имеют разные знаки; составим другой ряд из абсолютных величин этих чисел:

$$|u_1|,\ |u_2|,\ |u_3|,\ \dots\ |u_n|,\ \dots\dots;\quad (2)$$

требуется доказать, что если ряд (2) сходится, то и ряд (1) будет сходящимся.

Возьмем частичную сумму S_n первого ряда; она содержит как положительные, так и отрицательные члены. Обозначим сумму ее положительных слагаемых через S_n'; а сумму отрицательных через $-S_n''$, так что S_n'' будет суммой абсолютных значений отрицательных членов. Таким образом получаем:

$$S_n = S_n' - S_n''\,.$$

Переходя к ряду (2), составленному из абсолютных величин членов 1-го ряда, легко сообразить, что его частичная сумма σ_n будет равна:

$$\sigma_n = S_n' + S_n''\,.$$

Допустим, что ряд (2) сходится; тогда σ_n стремится к определенному пределу σ, и так как частичная сумма ряда с положительными членами при этом все время возрастает, то при всяком n имеем неравенство:

$$\sigma_n < \sigma\,,$$

или:

$$S_n' + S_n'' < \sigma\,,$$

откуда:

$$s'_n < \sigma \quad \text{и} \quad s''_n < \sigma.$$

С другой стороны, обе эти суммы, будучи суммами положительных слагаемых, все время возрастают вместе с числом n; следовательно, каждая из них в отдельности имеет предел. В таком случае и их разность:

$$s'_n - s''_n, \text{ равная } s_n,$$

тоже имеет предел при $n \to \infty$, т.е. ряд (I) будет сходящимся, что и требовалось доказать.

Итак, доказано, что если ряд (2) сходящийся, то и ряд (I) будет сходящимся. Обратного утверждать нельзя: может случиться, что ряд (I) будет сходиться, а ряд (2) окажется расходящимся. Примером может служить ряд:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots \pm \frac{1}{n}, \mp \ldots,$$

сходимость которого была доказана выше по признаку Лейбница; если же составим ряд из абсолютных значений членов данного ряда, то получим гармонический ряд:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots,$$

который, как известно, будет расходящимся.

Это обстоятельство заставляет сделать важное различие между сходящимися рядами с членами разных знаков. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов такого ряда, оказывается сходящимся, то данный ряд называется абсолютно или безусловно сходящимся; если же данный ряд сходится, а указанный выше вспомогательный ряд расходится, то данный ряд называется условно сходящимся.

Так, например, ряд:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots \pm \frac{1}{n}, \ldots$$

будет условно сходящимся.

Укажем путь для решения вопроса о сходимости ряда с членами разных знаков (этот путь можно применять и к знакопеременному ряду).

Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда; так как это будет ряд с положительными членами, то к нему обычно применяем признак Даламбера. Если вспомогательный ряд окажется сходящимся, то данный будет абсолютно сходящимся. Если же вспомогательный ряд окажется расходящимся, то о сходимости данного ряда еще ничего сказать нельзя. Впрочем, если при рассмотрении второго ряда мы убедились, что:

u_n не стремится к 0 при $n \to \infty$,

то данный ряд наверное расходится.

Пример I. Ряд:

$$1,\ -\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{4^2},\ \ldots\ldots$$

будет абсолютно сходящимся, так как сходимостью обладает ряд:

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{4^2},\ \ldots\ldots \text{(См. выше)}.$$

Пример 2. При каких значениях x, как положительных, так и отрицательных будет сходящимся ряд:

$$1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ \frac{x^4}{1.2.3.4},\ \ldots\ ?$$

Обозначим:

$$|x| = a$$

и перейдем к ряду:

$$1,\ \frac{a}{1},\ \frac{a^2}{1.2},\ \frac{a^3}{1.2.3},\ \frac{a^4}{1.2.3.4},\ \ldots\ldots;$$

выше было доказано, что этот ряд сходится при всяком конечном a (был применен признак Даламбера). Следовательно, данный ряд будет абсолютно сходящимся при всяком конечном значении x.

Вспоминая теорему I, можно утверждать, что общий член данного ряда:

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

стремится к 0. Таким образом получаем теорему, которая весьма пригодится впоследствии:

<u>Теорема 8. При всяком конечном значении x имеем:</u>

$$\lim\left\{\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\right\}_{n\to\infty} = 0.$$

<u>Примеры для упражнений.</u>

При каких значениях x будут сходящимися ряды:

1) $x,\ -\frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{3},\ -\frac{x^4}{4},\ \ldots$

<u>Ответ:</u> $-1 < x \leqslant +1$.

2) $1,\ 2x,\ 3x^2,\ 4x^3,\ \ldots$

<u>Ответ:</u> при $|x| < 1 \ldots$ сх.
при $|x| \geqslant 1 \ldots$ расх.

3) $1,\ -\frac{x^2}{1.2},\ +\frac{x^4}{1.2.3.4},\ \ldots$

<u>Ответ:</u> при всяком конечном x.

4) $\frac{\sin x}{1^2},\ -\frac{\sin 2x}{2^2},\ \frac{\sin 3x}{3^2},\ -\frac{\sin 4x}{4^2},\ \ldots$

<u>Ответ:</u> при всяком x.

6. <u>Понятие о степенных рядах.</u> Особое значение в анализе имеют степенные ряды, т.е. ряды вида:

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ \ldots a_nx^n,\ \ldots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ постоянные коэффициенты, а x есть переменная независимая; важное значение их выяснится ниже. Доказанные выше теоремы применяются и к этим рядам, что уже делалось при рассмотрении предыдущих примеров.

Равномерная сходимость. Для степенного ряда, как и для всякого ряда, члены которого суть функции от некоторой переменной независимой x, возникает следующий вопрос.

Если ряд сходится, то остаток ряда стремится к нулю:

$$\lim\left[R_n\right]_{n\to\infty}=0\ ;$$

это значит, что если нам задано произвольно малое число $\varepsilon>0$, то можно найти такое достаточно большое число $N>0$, что при $n>N$ всегда будет $|R_n|<\varepsilon$.

Для степенного ряда остаток R_n тоже будет функцией от x, и вот возникает вопрос: можно ли это число N найти так, что неравенство:

$$|R_n|<\varepsilon$$

будет выполнено для всякого значения x, лежащего в промежутке сходимости данного ряда, или для отдельных значений x придется подбирать различные числа N?

В I-м случае ряд называется равномерно сходящимся. Все ряды, с которыми мы будем иметь дело, обладают равномерной сходимостью; примеры на ряды, сходящиеся неравномерно, задаются более или менее искусственно.

В частности, для степенного ряда можно доказать, что если он сходится при некотором:

$$x=a,$$

и если q есть какое-нибудь положительное число, удовлетворяющее условию $q<|a|$, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно при всяком x, для которого имеем:

$$|x|<q.$$

(см., например, курс Куранта, ч.I, гл. 8, § § 4 и 5).

§ 38. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА.

Теория рядов нужна нам главным образом для того, чтобы познакомиться с разложением функций в степенные ряды. Но для решения последней задачи нам надо сначала вывести формулу Тейлора (и ее частный случай - формулу Маклорена); эта формула вообще является одной из важнейших в анализе. Предварительно придется пополнить наши сведения о производных высших порядков и познакомиться с дифференциалами высших порядков; это необходимо для вывода формулы Тейлора в ее различных формах.

I. Производные и дифференциалы высших порядков.

Читатель уже познакомился с производными высших порядков в § 18. Здесь нам надо прежде всего вывести общие выражения для производных порядка n от некоторых основных функций. Производная порядка n от функции:

$$y=f(x)$$

есть результат n последовательных дифференцирований, и обозначается она через:

$$f^{(n)}(x) \quad \text{или} \quad y^{(n)}.$$

Итак, найдем эту производную для следующих функций:

1) e^x. В этом случае имеем:

$$(e^x)'=e^x$$
$$(e^x)''=(e^x)'=e^x \quad \text{и т.д.}$$

легко понять, что:

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

2) $\sin x$. Находя последовательные производные от $\sin$, мы будем встречаться по очереди со следующими функциями:

$$\cos x, \ -\sin x, \ -\cos x, \ \sin x, \ldots;$$

но пользуясь тригонометрической формулой:

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

всегда можно свести выражение производной к синусу.

Итак имеем:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)''' = \left[\sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

и т.д.

Легко сообразить, что вообще имеем:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

3) $\cos x$. Рассуждаем подобно предыдущему и пользуемся формулой:

$$-\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right);$$

таким путем получается выражение для n-й производной:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Подробный вывод предоставляется читателю.

4) x^m. Здесь последовательно находим:

$$(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$$

$$(x^m)'' = m(m-1) \cdot x^{m-2}$$

$$(x^m)''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

и т.д.

Очевидно получается следующая общая формула:

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) \cdot x^{m-n} \qquad (*)$$

Если m - число целое и положительное, то:

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)(m-2)\ldots 2 \cdot 1,$$

а все производные высшего порядка равны нулю.

Так как:

$$(1+x)' = 1,$$

то подобно формуле $(*)$, можно написать такую:

$$\left[(1+x)^m\right]^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) \cdot (1+x)^{m-n}.$$

5) $\lg x$ Нам известно, что:

$$(\lg x)' = \frac{1}{x} = x^{-1};$$

известно также, что n-я производная от функции есть $(n-1)$-ая производная от ее первой производной; поэтому можно написать:

$$(\lg x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)}.$$

Правую же часть можно вычислить по формуле $(*)$, полагая в ней $m=-1$ и заменяя n на $(n-1)$:

$$(\lg x)^{(n)} = (-1)(-2)(-3)\ldots(-n+1)x^{-n}$$

или:

$$(\lg x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}.$$

Подобно этому можно получить производную для $\lg(1+x)$, которая нам понадобится ниже:

$$\left[\lg(1+x)\right]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}.$$

6) Производная порядка n от произведения 2 функций $u.v.$

Мы знаем, что:

$$(uv)'=u'.v+u.v';$$

далее имеем:

$$(uv)''=(u'.v)'+(u\,v')'=u''v+2u'v'+uv'';$$

$$(uv)'''=(u''v)'+2(u'v')'+(uv'')'=$$

$$=u'''v+u''v'+2\{u''v'+u'v''\}+u'v''+uv'''=$$

$$=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Выражения для производных $(uv)''$ и $(uv)'''$ напоминают нам формулы для квадрата и куба суммы:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

прежде всего мы видим полное совпадение коэффициентов, а затем порядки производных в I-й паре формул расположены по такому же закону, как степени во 2-й паре. Эта аналогия сохраняется и дальше, так что формулу для $(uv)^{(n)}$ можно получить из бинома Ньютона по указанному выше правилу:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+n.u^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{1.2}u^{(n-2)}\cdot v''+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.u^{(n-3)}\cdot v'''+\cdots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)};$$

и доказательство этой общей формулы идет тем же путем, который применяется для бинома Ньютона: предполагая ее верной для n, доказываем ее справедливость для $(n+1)$; только везде степени заменяются производными соответственных порядков.

Полученное выражение для $(uv)^{(n)}$ называется <u>формулой Лейбница</u>.

Найдем для примера

$$(x^2 \sin x)^{(n)};$$

принимая во внимание, что все производные от x^2 порядка выше 2-го равны нулю, найдем:

$$(x^2 \sin x)^{(n)} = x^2 \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+2nx\sin\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]+$$

$$+\,n(n-1)\sin\left[x+(n-2)\cdot\frac{\pi}{2}\right].$$

<u>Дифференциалы высших порядков.</u> Пусть y есть функция от x:

$$y=f(x),$$

мы знаем, что ее дифференциал равен:

$$dy=f'(x)dx;$$

этот дифференциал отныне будем называть дифференциалом I-го порядка.

Дифференциалом 2-го порядка (или вторым дифференциалом) называется дифференциал от дифференциала I-го порядка; обозначается он символом:

$$d^2y.$$

так что:

$$d^2y=d(dy);$$

точно также вводится дифференциал 3-го порядка:

$$d^3y = d(d^2y), \quad и т.д. \, ;$$

вообще:

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Найдем выражения для этих дифференциалов через производные соответствующих порядков. Из предыдущего следует, что

$$d^2y = d\{f'(x).dx\} \, ;$$

выясним, что dx здесь можно рассматривать, как постоянную величину. В самом деле, dx есть бесконечно-малое приращение аргумента x, но оно не зависит от того значения, которое имеет x: при одном и том же значении x, можно давать ему различные по величине приращения, и различным значениям x можно дать одно и то же приращение. Поэтому там, где мы имеем дело с функциями от x, зависящими от того значения, которое имеет x, дифференциал dx надо рассматривать, как постоянную. Следовательно, можно dx вынести за знак дифференциала и написать:

$$d^2y = dx \, . \, d\{f'(x)\} \, ;$$

но дифференциал производной, как и всякой функции, равен ее производной (т.е. в данном случае - производной 2-го порядка), умноженной на дифференциал аргумента:

$$d\{f'(x)\} = f''(x) \, xd,$$

так что:

$$d^2y = f''(x) \, . \, dx^2$$

Собственно здесь следовало бы в правой части написать:

$$(dx)^2,$$

но принято скобок не ставить. Читатель должен вообще тщательно различать символы:

$$d^2y \quad \text{и} \quad dy^2;$$

1-й означает 2-й дифференциал, а 2-й-квадрат дифференциала.

Переходим к 3-му дифференциалу:

$$d^3y = d(d^2y) = d\left[f''(x) \cdot dx^2\right] =$$

$$= dx^2 \cdot d\left[f''(x)\right];$$

но:

$$d\left[f''(x)\right] = f'''(x) \cdot dx,$$

так что:

$$d^3y = f'''(x) \cdot dx^3.$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к общей формуле:

$$d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n,$$

или:

$$d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n.$$

Из этих формул можно в свою очередь выразить производные через дифференциалы соответствующих порядков:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}; \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}; \quad \ldots \; y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Наконец, сказанное выше о dx приводит к выводу, что:

$$d^2x = 0, \quad d^3x = 0, \; \ldots$$

т.е. <u>дифференциалы высших порядков от аргумента все равны нулю.</u>

Примеры для упражнения.

1) Найти производные порядка n от следующих функций:

а) e^{kx}. Отв.: $k^n \cdot e^{kx}$.

б) a^x Отв.: $a^x(\lg a)^n$

в) $(a+bx)^m$ Отв.: $m(m-1)\ldots(m-n+1)b^n(a+bx)^{m-n}$

г) $\cos^2 x$ Отв.: $2^{n-1}\cos(2x+n\frac{\pi}{2})$.

2) Найти $(x^2\lg x)^{IV}$ по формуле Лейбница

Отв.: $-\frac{2}{x^2}$.

3) Найти $d^3(x^4)$. Отв.: $24x \cdot dx^3$

4) Найти $d^n(\sin x)$. Отв.: $\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\cdot dx^n$.

2. Формула Тейлора для целого многочлена.

Пусть нам дана некоторая функция:

$$f(x);$$

дадим аргументу приращение h и составим соответствующее приращение функции:

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x);$$

В I-м выпуске мы видели, какое важное значение имеет приращение функции при ее исследовании. В некоторых вопросах требуется разлагать это приращение по степеням приращения аргумента; легко видеть, что для этого нужно разложить $f(x+h)$ по степеням h; такое разложение и дает формула Тейлора.

Мы начнем с простейшего случая, когда $f(x)$ есть целый многочлен:

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m,$$

где коэффициенты $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}, A_m$ суть постоянные числа, а m есть целое и положительное число.

Подставляя сюда $(x+h)$ вместо x, получим:

$$f(x+h)=A_0(x+h)^m+A_1(x+h)^{m-1}+\cdots+A_{m-1}(x+h)+A_m;$$

раскрыв скобки и расположив правую часть по возрастающим степеням h, придем к выражению вида:

$$f(x+h)=B_0+B_1h+B_2h^2+B_3h^3+\cdots+B_mh^m;$$

коэффициенты B, зависящие от x, будут сейчас найдены.

В полученном тождестве будем рассматривать x как постоянную (другими словами, - закрепим его значение), а h будем считать переменной независимой. Полагая $h=0$, находим

$$f(x)=B_0;$$

далее, дифференцируя наше тождество по h и полагая

$$x+h=u,$$

в левой части получим:

$$\left[f(u)\right]'_h=f'(u)\cdot u'_h=f'(x+h)\cdot(x+h)'_h=f'(x+h);$$

таким образом, приходим к новому тождеству:

$$f'(x+h)=B_1+2\cdot B_2h+3B_3h^2+\cdots+mB_mh^{m-1};$$

полагая здесь $h=0$, имеем:

$$f'(x)=B_1.$$

Дифференцируя новое тождество, подобно предыдущему найдем:

$$f''(x+h)=2B_2+3.2B_3h+4.3B_4h^2+\cdots$$
$$\cdots+m(m-1)B_mh^{m-2};$$

подстановка $h=0$ даст:

$$f''(x)=2B_2.$$

Продолжая эти рассуждения, придем к равенствам:

$$f'''(x)=3.2.B_3$$

$$f^{IV}(x)=4.3.2\,B_4$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(m)}(x)=m(m-1)\dots 3.2\,B_m,$$

причем $f^{(m)}(x)$ есть число постоянное, от x независящее.

Итак, все коэффициенты B найдены:

$$B_0=f(x);\quad B_1=\frac{f'(x)}{1};\quad B_2=\frac{f''(x)}{1.2};$$

$$B_3=\frac{f'''(x)}{1.2.3};\ \dots\dots\quad B_m=\frac{f^{(m)}(x)}{1.2.3\dots m}.$$

Введем общепринятое обозначение для произведения всех чисел натурального ряда от I до k:

$$1.2.3\dots k=k!\ ;$$

тогда подставляя значения B, получаем <u>формулу Тейлора для целого многочлена m-ой степени</u>:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}\cdot f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+$$

$$+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{IV}(x)+\dots\dots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x)\dots(I)$$

Формулу Тейлора часто пишут в иной форме; именно, дадим аргументу значение a:

$$x=a$$

и обозначим:

$$x+h=z,$$

так что:

$$h=z-a\ ;$$

подставляя в предыдущую формулу, найдем:

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1}\cdot f'(a)+\frac{(z-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(z-a)^3}{3!}f'''(a)+$$

$$+\dots+\frac{(z-a)^m}{m!}f^{(m)}(a)\dots\dots\dots (II)$$

(впоследствии можно, конечно, вместо z снова поставить x).

Здесь символ $f^{(k)}(a)$ надо понимать, как результат подстановки $x=a$ в $f^{(k)}(x)$:

$$f^{(k)}(a)=\left[f^{(k)}(x)\right]_{x=a}$$

В этом втором виде формула Тейлора имеет большое применение в высшей алгебре.

Пример. Разложить многочлен:

$$x^4-3x^3+2x^2-5x+7$$

по степеням двучлена $(x+1)$.

Здесь имеем $a=-1$ и

$$f(x)=x^4-3x^3+2x^2-5x+7;$$

далее находим производные:

$$f'(x)=4x^3-9x^2+4x-5$$

$$f''(x)=2.\{6x^2-9x+2\}$$

$$f'''(x)=6.\{4x-3\}$$

$$f^{IV}(x)=24$$

Подставляем $x=-1$:

$$f(-1)=18;\quad f'(-1)=-22;\quad f''(-1)=34;$$

$$f'''(-1)=-42;\quad f^{IV}(-1)=24.$$

Следовательно, формула Тейлора (во II виде) дает:

$$x^4-3x^3+2x^2-5x+7=18+\frac{x+1}{1}\cdot(-22)+$$

$$+\frac{(x+1)^2}{1.2}\cdot 34+\frac{(x+1)^3}{1.2.3}\cdot(-42)+\frac{(x+1)^4}{1.2.3.4}\cdot 24,$$

или

$$x^4-3x^3+2x^2-5x+7=18-22(x+1)+17(x+1)^2-$$

$$-7(x+1)^3+(x+1)^4.$$

Пример для упражнения.

Дано, что

$$f(x)=x^3+x^2-3x+4;$$

разложить $f(1+h)$ по степеням h.

Отв.: $3+2h+4h^2+h^3$.

3. Формула Тейлора с остаточным членом.

Если теперь мы будем под $f(x)$ понимать любую функцию, то предыдущее рассуждение в этом случае неприменимо. Но оказывается, что $f(x+h)$ можно представить и в этом случае таким же многочленом, как и выше, прибавив только к нему некоторый добавочный член. Наиболее простой путь для вывода этой новой формулы дает интегральное исчисление.

Пусть дана нам функция $f(x)$, от которой требуется только выполнение того условия, чтобы все ее производные до порядка n включительно были непрерывны в рассматриваемом промежутке. Начнем с вычисления интеграла:

$$\int_x^{x+h} f'(t)\,dt=\Big[f(t)\Big]_x^{x+h}=f(x+h)-f(x),$$

откуда:

$$f(x+h)=f(x)+\int_x^{x+h} f'(t)\,dt.$$

Этот интеграл мы будем преобразовывать путем интегрирования по частям, но сначала сделаем в нем следующую подстановку:

$$t = x + h - z,$$

где z есть новая переменная интегрирования (x и h считаются величинами постоянными во все время вывода); отсюда имеем:

$$dt = -dz,$$

при $t = x$ будет $z = h$,

при $t = x + h$ будет $z = 0$,

так что:

$$\int_x^{x+h} f'(t)\,dt = -\int_h^0 f'(x+h-z)\,dz = \int_0^h f'(x+h-z)\,dz;$$

преимущество последнего выражения заключается в том, что здесь имеем более простые границы.

Подставляя, получаем формулу:

$$(\mathrm{I}) \ldots f(x+h) = f(x) + \int_0^h f'(x+h-z)\,dz.$$

Далее интегрируем по частям:

$$u = f'(x+h-z); \qquad dv = dz$$

$$du = -f''(x+h-z)\,dz; \quad v = z$$

$$\int_0^h f'(x+h-z)\,dz = \Big[z.\,f'(x+h-z)\Big]_0^h + \int_0^h f''(x+h-z)\,z\,dz;$$

но

$$\Big[z.\,f'(x+h-z)\Big]_0^h = h.\,f'(x),$$

и подставляя в формулу (I), приходим ко 2-й формуле:

$$(2) \ldots f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_0^h f''(x+h-z).\,z\,dz.$$

Далее опять интегрируем по частям:

$$u = f''(x+h-z); \qquad dv = z \cdot dz$$

$$du = -f'''(x+h-z) \cdot dz; \quad v = \frac{z^2}{2};$$

$$\int_0^h f''(x+h-z)\, z\, dz = \left[\frac{z^2}{1.2} \cdot f''(x+h-z)\right]_0^h +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^h f'''(x+h-z) z^2 dz = \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{1}{1.2}\int_0^h f'''(x+h-z) z^2 dz.$$

Подставляя в формулу (2), получаем следующее:

$$(3)\ldots\; f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{1}{1.2}\int_0^h f'''(x+h-z) z^2 \cdot dz$$

Проинтегрировав еще раз по частям, придем к формуле:

$$(4)\ldots\; f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) +$$

$$+\frac{1}{3!}\int_0^h f^{IV}(x+h-z) z^3 \cdot dz, \qquad \text{и т. д.}$$

Продолжая эти выкладки, дойдем, наконец, до формулы с номером (n):

$$(n)\ldots\; f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h f^{(n)}(x+h-z) z^{n-1} dz.$$

Это и будет формула Тейлора, причем последний член, носящий название "остаточного члена", дан в виде определенного интеграла; этот остаточный член условимся обозначать через R_n:

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h f^{(n)}(x+h-z) \cdot z^{n-1} dz.$$

Остаточному члену можно дать другую форму, более удобную для дальнейших приложений. Обратим внимание на то, что переменная интегрирования z, изменяясь в промежутке от 0 до данного нам числа h, сохраняет все время один и тот же знак, а потому и функция z^{n-1} сохраняет знак в границах интегрирования. На основании теоремы о среднем, можно другую функцию вынести средним значением за знак интеграла:

$$\int_0^h f^{(n)}(x+h-z)\, z^{n-1} dz = f^{(n)}(x+h-\xi)\cdot\int_0^h z^{n-1} dz,$$

где ξ есть некоторое промежуточное значение между 0 и h. Нетрудно убедиться, что это среднее значение можно представить так:

$$\xi = \alpha . h, \quad \text{где} \quad 0<\alpha<1.$$

Стоящий в правой части интеграл вычисляется без труда, и мы приходим к следующему выражению для R_n:

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x+h-\alpha h)\cdot\left[\frac{z^n}{n}\right]_0^h =$$

$$= \frac{h^n}{(n-1)!\,n}\cdot f^{(n)}\left\{x+h(1-\alpha)\right\};$$

разность $1-\alpha$ есть также положительное число, меньшее единицы; обозначим его через θ:

$$1-\alpha=\theta;$$

кроме того, очевидно:

$$(n-1)!\,n = n!\ ,$$

и таким образом для R_n получается следующее окончательное выражение:

$$R_n = \frac{h^n}{n!}\, f^{(n)}(x+\theta h),$$

где

$$0<\theta<1.$$

Эта форма остаточного члена была указана Л а г р а н ж е м .

Итак, мы получили формулу Тейлора с остаточным членом:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}\cdot f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Здесь тоже можно формуле Тейлора дать иной вид; полагаем:

$$x=a, \qquad x+h=z,$$

так что:

$$h=z-a;$$

тогда формула Тейлора получает вид:

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1}\cdot f'(a)+\frac{(z-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(z-a)^3}{3!}f'''(a)+$$

$$\cdots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}\{a+\theta(z-a)\};$$

впоследствии можно, конечно, заменить z на x.

Положив в этих формулах $n=1$, придем к весьма известной формуле Лагранжа:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

или по второй формуле:

$$f(z)-f(a)=(z-a)\cdot f'\{a+\theta(z-a)\};$$

число $a+\theta(z-a)$ по своей величине лежит между числами a и z, ибо здесь к числу a прибавляется часть разности $z-a$; обозначив это число через ξ, перепишем формулу Лагранжа так:

$$f(z)-f(a)=(z-a)\cdot f'(\xi).$$

Формулу Лагранжа называют также <u>формулой конечных приращений</u>, так как она дает выражение для разности:

$$f(z)-f(a),$$

которая есть нечто иное, как приращение функции, получаемое ею при переходе аргумента от значения $=a$ к значению $=z$.

Переписав последнее равенство несколько иначе:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(\xi),$$

можно высказать следующее предложение: <u>отношение приращения функции к приращению аргумента равно значению производной при некотором среднем значении аргумента.</u>

Переводя это на язык механики, скажем, что средняя скорость за известный промежуток времени равна скорости в некоторый момент этого промежутка.

Формула Лагранжа позволяет весьма просто доказать предложение о том, что если производная некоторой функции в известном промежутке постоянно $=0$, то в этом промежутке данная функция сохраняет постоянное значение. Действительно, в этом случае имеем:

$$f'(\xi)=0,$$

а потому:

$$f(z)=f(a)$$

при всяком z, лежащем в нашем промежутке.

Возвращаемся к общему случаю формулы Тейлора и возьмем ее во 2-м виде. Число a можно выбирать произвольно, лишь бы только оно лежало в промежутке, в котором выполнены условия непрерывности. Допустим, что в этом промежутке лежит 0; тогда полагая в формуле Тейлора:

$$a=0,$$

получим замечательный частный случай ее - <u>формулу Маклорена:</u>

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}\cdot f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+$$

$$+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}\cdot f^{(n)}(\theta x).$$

Эта формула даст нам возможность разложить некоторые функции в степенные ряды.

Пример I. Разложить $\cos(x+h)$ по формуле Тейлора (по степеням h), положив $n=4$.

Здесь имеем:

$$f(x)=\cos x;\quad f'(x)=-\sin x;\quad f''(x)=-\cos x,$$
$$f'''(x)=\sin x,\quad f^{IV}(x)=\cos x.$$

следовательно:

$$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2}\cos x+\frac{h^3}{6}\sin x+$$
$$+\frac{h^4}{24}\cdot\cos(x+\theta h).$$

Если h достаточно мало, то отсюда можно найти $\cos(x+h)$, зная $\sin x$ и $\cos x$; именно, если положить:

$$\cos(x+h)\approx\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2}\cos x+\frac{h^3}{6}\sin x,$$

то ошибка этого приближенного равенства выразится остаточным членом, причем легко видеть, что:

$$\left|\frac{h^4}{24}\cdot\cos(x+\theta h)\right|<\frac{|h|^4}{24}$$

При достаточно малом h, можно взять еще меньше членов в правой части.

К вопросу о приближенных вычислениях мы вернемся ниже.

Пример 2. Разложить с помощью формулы Тейлора функцию $\lg x$ по степеням $(x-1)$, взяв $n=3$.

Здесь имеем:

$$a=1$$

$$f(x)=\lg x;\quad f'(x)=\frac{1}{x};\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2};\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3};$$

$$f(1)=0;\quad f'(1)=1;\quad f''(1)=-1;$$

тогда формула Тейлора дает:

$$\lg x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{[1+\theta(x-1)]^3};$$

в частности, при $x=2$ имеем:

$$\lg 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3(1+\theta)^3},$$

где θ есть неизвестное нам число, удовлетворяющее неравенствам:

$$0<\theta<1.$$

В заключение мы укажем еще один вид формулы Тейлора, который выяснит до конца один вопрос, затронутый в I-м выпуске. Именно, мы видели, что приращение функции равно ее дифференциалу плюс бесконечно-малая высшего порядка (считая приращение аргумента dx бесконечно-малой I-го порядка); теперь мы можем точно указать, о какой бесконечно-малой здесь идет речь.

Возьмем формулу Тейлора в первоначальном виде и перенесем I-й член правой части в левую:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+$$

$$+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h).$$

В левой части стоит не что иное, как приращение функции $\Delta f(x)$, соответствующее приращению аргумента h; полагая последнее равным дифференциалу аргумента:

$$h=dx,$$

перепишем нашу формулу в следующем виде:

$$\Delta f(x)=f'(x)\,dx+\frac{f''(x)\,dx^2}{1.2}+\frac{f'''(x)\,dx^3}{3!}+\dots$$

$$\dots+\frac{f^{(n-1)}(x).\,dx^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta.dx).\,dx^n.$$

Теперь в правой части стоят, начиная со 2-го члена, дифференциалы высших порядков от данной функции:

$$f'(x)\,dx=df(x)$$

$$f''(x)\,dx^2=d^2f(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}=d^{n-1}f(x);$$

что же касается последнего члена, то здесь имеем дифференциал n-го порядка, только в его выражение вместо x подставлено $(x+\theta.dx)$, причем само dx остается, конечно, без изменения; этот дифференциал мы обозначим символом:

$$d_\theta^n f(x).$$

Подставляя, получаем формулу:

$$\Delta f(x)=df(x)+\frac{d^2f(x)}{1.2}+\frac{d^3f(x)}{3!}+\dots$$

$$\dots+\frac{d^{n-1}f(x)}{(n-1)!}+\frac{d_\theta^n f(x)}{n!};$$

это дает нам разложение приращения функции по дифференциалам различных порядков; если dx есть бесконечно-малая I-го порядка, то $d^kf(x)$ равный:

$$d^kf(x)=f^{(k)}(x).\,dx^k$$

будет бесконечно-малой порядка k.

Если данную функцию обозначим через y, то выведенная формула запишется более сжато:

$$\Delta y=dy+\frac{d^2y}{1.2}+\frac{d^3y}{3!}+\dots+\frac{d^{n-1}y}{(n-1)!}+\frac{d_\theta^n y}{n!};$$

в таком виде формула Тейлора обобщается на случай нескольких переменных независимых (о чем будет речь ниже).

Пример 3. Разложить приращение $\lg x$ по дифференциалам различных порядков, взяв $n=4$.

Здесь имеем:

$$y=\lg x;\quad dy=\frac{dx}{x};\quad d^2y=-\frac{dx^2}{x^2};\quad d^3y=\frac{2dx^3}{x^3};$$

$$d^4y=-\frac{6dx^4}{x^4};\quad d^4_\theta y=-\frac{6dx^4}{(x+\theta dx)^4},$$

так что:

$$\Delta \lg x=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-\frac{dx^4}{4(x+\theta dx)^4}.$$

Примеры для упражнений.

1) Разложить с помощью формулы Тейлора e^{x+h} по степеням h, взяв $n=4$.

Отв.: $e^{x+h}=e^x\left\{1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}\cdot e^{\theta h}\right\}$

2) Разложить $\sqrt{1+x}$ по степеням x по формуле Маклорена, взяв $n=3$.

Отв.: $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}\cdot\frac{x^3}{\sqrt{(1+\theta x)^5}}$

3) Разложить $\sin x$ по степеням разности $(x-\frac{\pi}{2})$, положив $n=6$.

Отв.: $\sin x=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-$

$$-\frac{1}{6!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

§ 39. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ.

I. Формулы Тейлора и Маклорена дают разложения функций по степеням $(x-a)$ или x; эти разложения содержат по n членов и заканчиваются остаточными членами, в которые входят неизвестные нам числа θ. При некоторых условиях оказывается возможным разложить функцию по степеням $(x-a)$ или x в бесконечный ряд, в котором уже не будет членов, составленных по иному закону, чем первые члены наших формул.

Пусть дана функция $f(x)$, и пусть как она сама, так и все ее производные (любого порядка) непрерывны в промежутке, содержащем данное число a.

Рассмотрим бесконечный ряд:

$$f(a);\quad \frac{x-a}{1}f'(a);\quad \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a);\quad \ldots\ldots \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a);\ldots;$$

составим его частичную сумму:

$$S_n = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(a).$$

Эту частичную сумму можно вычислить с помощью формулы Тейлора; перенеся остаточный член в другую часть, из последней формулы получим:

$$f(a) + \frac{x-a}{1}\cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(a) = f(x) - R_n,$$

так что:

$$S_n = f(x) - R_n,$$

где:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}\{a+\theta(x-a)\}.$$

Для определения сходимости ряда, надо искать предел:

$$\lim_{n\to\infty}[S_n];$$

при этом переходе к пределу, $f(x)$ остается постоянной, и все дело сводится к розысканию предела остаточного члена.

Если оказывается, что:

$$(*)\ldots \quad \lim_{n\to\infty}[R_n]=0,$$

то:

$$\lim_{n\to\infty}[S_n]=f(x);$$

тогда наш ряд будет сходящимся, и его сумма равна $f(x)$.

Таким образом, для всех значений аргумента, при которых выполняется условие $(*)$, имеем следующее разложение данной функции в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+$$

$$+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots.$$

Особенно важный случай получается при $a=0$; тогда мы приходим к разложению функции в ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

Ввиду важности этого разложения, сформулируем отчетливо условия, при которых оно имеет место: если значения функции и всех ее производных при $x=0$:

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ \ldots\ f^{(n)}(0),\ \ldots$$

суть вполне определенные числа, и если:

$$\lim_{n\to\infty}[R_n]=0,$$

то данная функция $f(x)$ разлагается в ряд Маклорена для всех тех значений аргумента, при которых выполняется последнее условие. Необходимость I-го условия вытекает из того, что в случае его невыполнения нельзя даже говорить о самих членах ряда.

Напомним, что в рассматриваемом случае остаточный член дается формулой:

$$R_n = \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\theta x),$$

где:

$$0 < \theta < 1.$$

2. Разложение функции e^x.

Как известно, производная любого порядка от e^x равна самой функции, так что здесь имеем:

$$f(x) = e^x \quad \text{и} \quad f^{(n)}(x) = e^x;$$

полагая $x=0$, получим:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 1.$$

Таким образом, первое условие - выполнено; остается рассмотреть остаточный член.

Так как $\quad f^{(n)}(x) = e^x,$

то $\quad f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x};$

а потому: $\quad R_n = \frac{x^n}{n!} \cdot e^{\theta x}.$

В § 37 была доказана теорема 8, в силу которой:

$$\lim \left[\frac{x^n}{n!}\right]_{n\to\infty} = 0$$

при всяком конечном значении x; в этом же случае 2-й множитель:

$$e^{\theta x}$$

есть величина конечная, так что:

$$\lim \left[R_n\right]_{n\to\infty} = 0$$

Таким образом, получаем следующее разложение функции e^x в степенной ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots ;$$

верное при всяком конечном значении аргумента.

Пример I. Разложить в ряд Маклорена функцию: $\frac{1-a^{-x}}{x}$

(проф. Граве "Внутр.балистика", ч.I, стр.78).

Все дело сводится к разложению в ряд показательной функции a^{-x}; мы можем написать:

$$a = e^{\lg a} \text{ и } a^{-x} = e^{-x \lg a};$$

заменяя в предыдущем разложении x на $-x\lg a$, находим:

$$a^{-x} = 1 - x \lg a + \frac{x^2}{1.2} \lg^2 a - \frac{x^3}{3!} \lg^3 a + \frac{x^4}{4!} \lg^4 a \dots$$

Далее имеем:

$$1 - a^{-x} = \lg a \left\{ x - \frac{x^2}{1.2} \lg a + \frac{x^3}{3!} \lg^2 a - \frac{x^4}{4!} \lg^3 a + \dots \right\}$$

$$\frac{1-a^{-x}}{x} = \lg a \left\{ 1 - \frac{x \lg a}{1.2} + \frac{x^2 \lg^2 a}{3!} - \frac{x^3 \lg^3 a}{4!} + \dots \right\}$$

Пример 2. Сопротивление воздуха, действующее на пластинку, задается формулой:

$$P_o = Sp_o \cdot \left\{ e^{Bv^2} - e^{-Bv^2} \right\},$$

где v - скорость движения пластинки, а S, p_o, B - постоянные; разложить P_o по степеням v, ограничиваясь вторыми степенями (проф. Мечников "Конспект лекций по внешней балистике", стр. I8-2I).

Применяя разложение показательной функции в ряд Маклорена, получаем:

$$e^{Bv^2} = 1 + Bv^2 + \frac{B^2v^4}{1.2} + \frac{B^3v^6}{3!} + \dots$$

$$e^{-Bv^2} = 1 - Bv^2 + \frac{B^2v^4}{1.2} - \frac{B^3v^6}{3!} + \dots$$

$$e^{Bv^2} - e^{-Bv^2} = 2Bv^2 + 2 \cdot \frac{B^3v^6}{3!} + \dots$$

$$P_0 \approx 2Sp_0 \cdot Bv^2.$$

3. Разложение $\sin x$ и $\cos x$.

В первом случае имеем:

$$f(x) = \sin x \quad \text{и} \quad f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

(см. § 38, п. 2); отсюда:

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(k)}(0) = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Если $k = 2m$, то:

$$f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0;$$

а если $k = 2m+1$, то

$$f^{(2m+1)}(0) = \sin\frac{(2m+1)\pi}{2} = \pm 1.$$

Итак, все производные четного порядка при $x=0$ сами равны нулю, а производные нечетного порядка попеременно равны $+1$ и -1:

$$f'(0) = +1; \quad f'''(0) = -1; \quad f^{V}(0) = +1; \dots$$

Мы видим, что первое условие выполнено, и все коэффициенты разложения в ряд Маклорена - уже известны. Переходим к остаточному члену; здесь имеем:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} \cdot \sin\left(\theta x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

но первый множитель стремится к 0 при неограниченном возрастании n, а второй по абсолютной величине не превышает единицы.

Следовательно:

$$\lim_{n \to \infty} \left[R_n \right] = 0,$$

и получается следующее разложение $\sin x$ в степенной ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ,$$

верное при всяком конечном значении x.

Подобным же образом разлагается в бесконечный степенной ряд и $\cos x$. Предоставляя подробный вывод читателю, заметим только, что здесь окажутся равными нулю все производные нечетного порядка; а производные четного порядка будут попеременно равны ± 1.

Таким образом, приходим к разложению:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdot \cdot \cdot \cdot ,$$

которое имеет место при всяком конечном значении x.

Полученные разложения функций e^x, $\sin x, \cos x$ (равно как и 2 последующих) надо твердо запомнить: это - одни из важнейших формул математического анализа.

<u>Пример.</u> Разложить $\sin^2 x$ в ряд Маклорена.

Из тригонометрии нам известно, что:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} ;$$

но $\cos 2x$ можно разложить по предыдущей формуле, заменяя в ней x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{1.2} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Отсюда находим:

$$1-\cos 2x = 2x^2 - \frac{2^4 x^4}{4!} + \frac{2^6 x^6}{6!} - \dots$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} + \frac{2^5 \cdot x^6}{6!} - \dots$$

Если отбросить степени выше 4-й, то получим приближенную формулу:

$$\sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3}$$

(в таком виде применяется эта формула, например, в курсе т. Гельзиха "Теория ошибок", ч.II, стр.190).

4. Разложение в степенной ряд логарифмической функции.

Разложить в ряд Маклорена $\lg x$ нельзя, потому что для этой функции не выполняется первое условие.

Поэтому будем раскладывать в ряд Маклорена функцию:

$$\lg(1+x),$$

для которой это условие оправдывается; рассматривая указанную функцию, аргументу можно давать только такие значения, которые удовлетворяют неравенству:

$$x > -1,$$

так как при $x=-1$ получаем разрыв непрерывности, а при $x<-1$ будет $1+x<0$, и отрицательные числа не имеют вещественных логарифмов.

В § 38 (п.1) мы видели, что:

$$\left[\lg(1+x)\right]^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{(1+x)^k};$$

по этой формуле можно вычислять все последующие, начиная со 2-й, а для 1-й непосредственно находим:

$$\left[\lg(1+x)\right]' = \frac{1}{1+x}.$$

Полагая теперь $x=0$, найдем следующие значения функции и ее производных:

$$f(0)=\lg 1=0; \quad f'(0)=1$$
$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$$

Таким образом I-е условие разложения в ряд Маклорена - выполнено, и члены этого ряда получают вид:

$$\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\frac{x^k}{k!}=(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k}.$$

Далее можно доказать, что разложение $\lg(1+x)$ в ряд Маклорена имеет место для значений аргумента, удовлетворяющих неравенствам:

$$-1<x\leqslant+1.$$

Для указанных значений x, получаем таким образом разложение:

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\dots.$$

Из предыдущего уже видно, что во всяком случае надо считать:

$$x>-1;$$

но легко доказать, что это разложение теряет смысл при $x>+1$, так как ряд правой части будет расходящимся. Действительно, понимая под x число большее $+1$, возьмем отношение абсолютных значений двух соседних членов ряда u_{n+1} и u_n:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}=\frac{n}{n+1}\cdot x;$$

при достаточно большом n множитель:

$$\frac{n}{n+1}$$

будет сколь-угодно близок к I, а другой множитель:

$$x > 1,$$

так что произведение:

$$\frac{n}{n+1} \cdot x,$$

начиная с некоторого значения n, будет >1; следовательно, члены ряда будут по абсолютному значению возрастать, и необходимое условие сходимости не выполняется.

Итак, речь может итти только о промежутке:

$$-1 < x \leqslant +1.$$

Для положительной его части:

$$0 < x \leqslant +1,$$

можем доказать, что остаточный член, заданный по формуле Лагранжа, стремится к 0 при $n \to \infty$.

В самом деле, здесь мы имеем:

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{1+\theta x} \right\}^n$$

Число θ вообще меняется с изменением числа n; но при $\theta > 0$ и $x > 0$ всегда имеем:

$$1 + \theta x > 1,$$

откуда:

$$\frac{1}{1+\theta x} < 1;$$

а потому последний множитель всегда будет удовлетворять условию:

$$\left\{\frac{1}{1+\theta x}\right\}^n < 1,$$

и следовательно будет величиной ограниченной. Что же касается множителя $\frac{x^n}{n}$, то легко видеть справедливость утверждения:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^n}{n}\right] = 0$$

при указанином значении x.

Итак, для всех значений аргумента лежащих в промежутке:

$$0 < x \leqslant +1$$

имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left[R_n\right] = 0,$$

и наше разложение имеет силу.

Что же касается отрицательной части промежутка:

$$-1 < x < 0,$$

то и здесь остаточный член стремится к 0; только для того, чтобы убедиться в этом, надо задать его в иной форме, указанной Коши, а именно:

$$R_n = \frac{x^n \cdot (1-\theta_1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(\theta_1 x),$$

где:

$$0 < \theta_1 < 1.$$

Для получения этой формулы из выражения для R_n с помощью определенного интеграла также можно воспользоваться теоремой о среднем; только надо иначе разбить на два множителя под'интегральное выражение.

Выведенное разложение $lg(1+x)$ можно использовать для вычисления логарифмов; так, полагая $x=1$, находим:

$$lg\,2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\dots;$$

но в § 37 мы уже видели, что этот ряд сходится весьма медленно.

Поэтому, из полученного нами разложения для $lg(1+x)$ выводят новые ряды, более удобные для вычисления. Возьмем это разложение:

$$lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots;$$

и заменим в нем x на $-x$ (при этом уже нельзя считать $x=+1$, так как значение $x=-1$ у нас исключено; следовательно, должно быть $|x|<1$); тогда получаем:

$$lg(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\dots;$$

вычитая из I-го ряда почленно 2-й ряд, приходим к новой формуле:

$$lg\,\frac{1+x}{1-x}=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right\}$$

Это разложение представляет значительно большие удобства для вычислений; как именно им пользуются,- увидим в следующем параграфе.

5. <u>Биномиальный ряд.</u>

В элементарной алгебре выводится формула бинома Ньютона для:

$$(1+x)^m$$

при целом положительном m.

Мы обобщим сейчас эту формулу для любого показателя m; а для решения поставленной задачи разложим функцию:

$$f(x)=(1+x)^m$$

в ряд Маклорена.

В § 38 (п.I) мы видели, что:

$$f^{(k)}(x)=m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k};$$

полагая $x=0$, имеем:

$$f(0)=1; \quad f^{(k)}(0)=m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1);$$

и члены ряда имеют вид:

$$\frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{1.2.3\dots k}.x^k.$$

Можно доказать, что остаточный член, взятый по формуле Коши, стремится к 0 при $n\to\infty$ для значений x, удовлетворяющих неравенствам:

$$-1<x<+1.$$

Следовательно, для указанных значений аргумента получаем разложение:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.x^3+$$

$$+\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}x^n+\dots.$$

При m целом и положительном ряд обрывается, так как начиная с некоторого места, коэффициенты его членов обращаются в нули, и получается известная формула бинома Ньютона; при всяком же другом m получаем бесконечный ряд, носящий название биномиального.

Пример I. Разложить в ряд Маклорена функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Переписав данную функцию в таком виде:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

мы можем подвести ее под обобщенную формулу бинома Ньютона, положив в последней:

$$m=-\frac{1}{2}$$

и заменив x на $-x^2$. Таким образом, получаем следующее разложение:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{1}{2}(-x^2)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2}(-x^2)^2+$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1.2.3}(-x^2)^3+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{1.2.3.4}(-x^2)^4+\cdots\cdots;$$

после всевозможных упрощений приходим к формуле:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot x^6+$$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\cdots\cdots$$

Это разложение имеет место при:

$$x^2<1.$$

Пример 2. Ускорение силы тяжести на поверхности земли равно g_0; каково будет ее ускорение g, если кратчайшее расстояние материальной точки от земной поверхности равно y? Вывести приближенную формулу, ограничиваясь первой степенью y (задачник математической кафедры № 162). Обозначая радиус земли через R, и принимая во внимание, что ускорение силы тяжести обратно пропорционально квадрату расстояния от центра земли, имеем пропорцию:

$$\frac{g}{g_0}=\frac{R^2}{(R+y)^2}.$$

Далее преобразуем следующим образом:

$$\frac{g}{g_0}=\frac{1}{(1+\frac{y}{R})^2}=\left(1+\frac{y}{R}\right)^{-2}.$$

Считая, что $y<R$ (как это, например, имеет место для снаряда даже при сверхдальной стрельбе), а потому

$$\frac{y}{R}<1,$$

можно разложить правую часть в биномиальный ряд:

$$g=g_0\cdot\left\{1-2\frac{y}{R}+3\left(\frac{y}{R}\right)^2-4\left(\frac{y}{R}\right)^3+\cdots\right\}$$

Отсюда получаем требуемое приближение:

$$g\approx g_0\left(1-\frac{2y}{R}\right).$$

<u>Примеры для упражнения.</u>

1) В некоторых прикладных вопросах встречаются так называемые "гиперболические" функции, а именно: гиперболический синус (обозначение: $\sin hyp\, x$ или $sh\, x$) и гиперболический косинус(обозначение: $\cos hyp\, x$ или $ch\, x$); эти функции определяются следующим образом:

$$\cos hyp\, x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \sin hyp\, x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Требуется разложить эти функции в ряд Маклорена.

Отв.: $Cos\,hyp\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$$Sin\,hyp\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Эти формулы имеют место при всяком x.

2) Найти разложение функции:

$$e^{\sin\varphi}$$

в ряд Маклорена, ограничиваясь 4-й степенью φ.

Ответ: $e^{\sin\varphi} = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{8} + \cdots$

3) Задачник матем. кафедры №№ 160, 163 и 170.

4) Разложить в ряд Маклорена функцию:

$$\sqrt{1+x}.$$

Ответ: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \cdots$

$$|x| < 1.$$

5) То же самое для функции:

$$\frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Указание. Разложить $\frac{1}{(1-x)^2}$ в биномиальный ряд и умножить его на $(1+x)$.

Ответ: $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots; \quad |x| < 1.$

6) Канат или цепь, подвешенные в двух точках, принимают форму так называемой "цепной линии", которая задается уравнением:

$$y = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right\};$$

на практике заменяют часто эту линию параболой, отбрасывая в разложении показательных функций все степени выше 2-й (см. § 14, пример 2).

Найти уравнение этой параболы.

<u>Ответ:</u> $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

7) Разложить $tg\,x$ в ряд Маклорена, ограничившись 3-й степенью x.

<u>Ответ:</u> $tg\,x \approx x + \frac{x^3}{3}$.

§ 40. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ.

I. Занимаясь приближенными вычислениями, мы сплошь и рядом будет округлять десятичные дроби; условимся всегда применять при этом следующее "правило дополнения".

Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из удерживаемых не меняется; если же первая из отбрасываемых равна или больше 5, то последняя из удерживаемых цифр увеличивается на I.

Так, например, если:

$$a = 3,07827185$$

и мы желаем удержать 3 десятичных знака, то надо будет взять:

$$a \approx 3,078;$$

если же желаем удержать 4 знака, то надо написать:

$$a \approx 3,0783.$$

Легко видеть, что при соблюдении правила дополнения, погрешность приближенного значения будет меньше I|2 единицы, стоящей на месте последнего десятичного знака. Так, погрешность I-го из написанных выше приближений будет $< 0,0005$, а для 2-го она $< 0,00005$. Условимся говорить, что приближенное число содержит n верных десятичных знаков, если его погрешность будет меньше I|2 единицы, стоящей на месте последнего знака, т.е.

если она меньше, чем:

$$\frac{5}{10^{n+1}}.$$

Если какая-либо величина разложена в бесконечный ряд, то мы можем приближенно вычислить ее, удерживая только несколько первых членов; погрешность такого приближения будет, очевидно, по абсолютной величине меньше абсолютной величины остатка ряда R_n.

Кроме того, надо учитывать, что вычисляя каждый член ряда, мы будем округлять его; поэтому значение каждого слагаемого будет само по себе приближенным. Конечно, погрешности различных слагаемых могут быть разных знаков и таким образом могут до известной степени компенсироваться; но мы должны равняться на самый неблагоприятный случай, когда все эти погрешности - одного знака, и потому их приходится складывать.

Наконец, надо сказать, что точного значения погрешности мы не знаем; в самом деле, если бы мы точно знали, чему равна наша ошибка, то мы ее и не сделали бы, внеся соответственную поправку. Поэтому мы только оцениваем погрешность, т.е. находим высшую границу для ее абсолютного значения. Ниже мы увидим, как все эти замечания учитываются на практике.

2. Вычисления с помощью ряда для e^x.

В предыдущем параграфе было получено разложение:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ ,$$

имеющее место при всяком конечном значении x.

Если для приближенного вычисления значения показательной функции положить:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (1)$$

то возникает вопрос об оценке погрешности, которая происходит от отбрасывания остальных членов. Здесь приходится различать 2 случая, смотря по знаку числа x:

I) $x>0$. При положительном значении x наш ряд был рассмотрен в § 37 (п.3), и там было выведено, что погрешность приближенного равенства (I) будет меньше, чем:

$$\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{n+1}{n+1-x}.$$

2) $x<0$.

Тогда e^x разлагается в знакопеременный ряд и согласно доказанному в § 37 (п.4), погрешность приближенного равенства (I) будет по абсолютному значению меньше, чем:

$$\frac{|x|^n}{n!}$$

Кроме того, как было уже сказано, надо учитывать ошибку округления, происходящую при вычислении каждого слагаемого.

Пример I. Вычислить e с 5 верными десятичными знаками.

Полагая в равенстве (I):

$$x=1,$$

найдем:

$$e\approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}, \qquad (2)$$

причем погрешность, происшедшая вследствие отбрасывания остальных членов, будет меньше, чем:

$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Теперь мы должны так подобрать число n, а также число верных цифр при вычислении каждого слагаемого, чтобы общая погрешность равенства (2) была меньше, чем:

0,000005.

Начинаем с подбора числа n; нет смысла испытывать первые значения n, так как они очевидно не дадут требуемой точности. Поэтому начнем с $n=8$; при этом значении, высшая граница погрешности (от отбрасывания членов ряда) будет:

$$\frac{1}{8!}\cdot\frac{9}{8}=0,0000279\ldots\ldots,$$

и мы видим, что она еще слишком велика. Берем $n=9$; тогда:

$$\frac{1}{9!}\cdot\frac{10}{9}=0,0000031\ldots\ldots;$$

это значение приемлемо, и оно оставляет еще запас для ошибки округления.

Таким образом, будем вычислять e по формуле:

$$e\approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!} \qquad (3)$$

Слагаемые этой суммы, начиная с 3-го, вычисляются весьма просто, деля предыдущее слагаемое на последнего множителя знаменателя, т.е.:

$\frac{1}{3!}$ получается из $\frac{1}{2}$ делением на 3,

$\frac{1}{4!}$ получается из $\frac{1}{3!}$ делением на 4, и т.д.

Совершенно ясно, что каждое из слагаемых надо вычислять с числом знаков больше 5, чтобы округлив сумму, получить верных 5 знаков. Попробуем вычислять их с 6 знаками; тогда погрешность округления в каждом из последних 6 слагаемых (первые 2 известны точно) будет иметь своей высшей границей число:

0,0000005,

так что в сумме она может достигнуть числа:

0,000003;

складываясь с указанной выше, она может превзойти заданную нам границу.

Поэтому каждое из слагаемых будем вычислять с 7 знаками; тогда высшие границы погрешностей будут:

вследствие отбрасывания членов 0,0000031

вследствие округления 0,0000003

$$0{,}0000034$$

Таким путем мы достигнем требуемой точности.

Переходим к вычислениям:

$$
\begin{aligned}
2 &= 2{,}0000000\\
\frac{1}{2} &= 0{,}5000000\\
\frac{1}{3!} &\approx 0{,}1666667\\
\frac{1}{4!} &\approx 0{,}0416667\\
\frac{1}{5!} &\approx 0{,}0083333\\
\frac{1}{6!} &\approx 0{,}0013889\\
\frac{1}{7!} &\approx 0{,}0001984\\
\frac{1}{8!} &\approx 0{,}0000248\\
\hline
& \quad 2{,}7182788
\end{aligned}
$$

Удерживая в полученном числе 5 десятичных знаков, находим:

$$e \approx 2{,}71828$$

(более точное значение e:

$$e = 2{,}718281828459\ldots).$$

Пример 2. Вычислить $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с тремя десятичными знаками.

Так как дело идет о вычислении $e^{-\frac{1}{4}}$, то полагая в равенстве (I):

$$x = -\frac{1}{4},$$

получаем приближенную формулу:

$$e^{-\frac{1}{4}} \approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots\pm\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

причем ее погрешность будет по абсолютному значению меньше числа:

$$\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

т.е. меньше первого из отброшенных членов.

По условию задачи, мы должны найти такое приближение, чтобы общая его погрешность была меньше числа:

0,0005.

Будем вычислять члены нашей суммы, пока не дойдем до такого, который удовлетворит этому требованию, и притом - с запасом для ошибки округления; эти вычисления понадобятся нам и для дальнейшего решения.

Итак имеем:

$$\frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=0{,}03125$$

$$\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=0{,}00260\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4=0{,}00016\ldots\ldots,$$

очевидно, этот член уже можно отбросить, и получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Вычислять с округлением придется всего 2 члена, так что если вычислим их с 4 знаками, то общая их погрешность не превысит:

0,0001;

складывая ее с величиной первого отброшенного члена, найдем в качестве высшей границы погрешности нашего вычисления число:

$$0{,}00026,$$

и следовательно удовлетворим поставленному требованию.

Складываем отдельно положительные и отрицательные слагаемые и из I-й суммы вычитаем 2-ю:

$$1 = 1{,}0000 \qquad \frac{1}{4} = 0{,}2500$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \approx 0{,}0313 \qquad \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 0{,}0026$$

$$1{,}0313 \qquad 0{,}2526.$$

$$1{,}0313 - 0{,}2526 = 0{,}7787$$

Округляя до 3 десятичных знаков окончательно имеем:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0{,}779.$$

3. Вычисления $\sin x$ и $\cos x$.

Полученные в § 39 разложения:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$

при всяком x дают знакопеременные ряды; поэтому весьма просто решается вопрос о погрешности, происходящей от удержания конечного числа членов и отбрасывания остальных.

Основываясь на ряде синуса, разберем вопрос, имеющий практическое значение. Имея дело с малыми углами, весьма часто пользуются приближенным равенством:

$$\sin x \approx x; \qquad (4)$$

Спрашивается, для каких углов это равенство даст нам $\sin x$ с 2 верными десятичными знаками. Мы знаем, что абсолютная величина погрешности равенства (4) будет меньше, чем:

$$\frac{x^3}{3!}.$$

С другой стороны, нам нужно найти такие значения x, при которых погрешность равенства (4) была бы меньше числа:

$$0{,}005;$$

очевидно, мы достигнем этого, если подберем x так, чтобы:

$$\frac{x^3}{6} < 0{,}005$$

или:

$$x^3 < 0{,}030.$$

Отсюда находим для x неравенство:

$$x < \sqrt[3]{0{,}030};$$

но: $\sqrt[3]{0{,}030} \approx 0{,}3$ с недостатком; так что предыдущее условие будет и подавно удовлетворено, если x удовлетворит неравенству:

$$x < 0{,}3.$$

Задача наша решена, причем высшая граница для угла получилась в радианах; переходя к градусному определению (соответственные данные имеются в таблицах логарифмов и в справочниках), находим:

$$x < 17^\circ 11' 19''$$

Итак, во всяком случае для углов, не превышающих 17°, формула (4) дает величину синуса с 2 верными десятичными знаками.

<u>Пример I.</u> Вычислить $\sin 10^\circ$ с двумя десятичными знаками.

Здесь имеем:

$$x = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}17453$$

(это значение взято из справочника); следовательно, согласно сказанному:

$$\sin 10^\circ \approx 0{,}17.$$

Пример 2. Вычислить $\cos\frac{1}{2}$ с тремя десятичными знаками.

Другими словами идет речь о вычислении косинуса угла, равного половине радиана; в градусном измерении этот угол равен:

$$28^{\circ}38'52''.$$

В данном случае имеем разложение:

$$\cos\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Будем вычислять его первые члены, пока не дойдем до такого, который окажется меньше, чем:

$$0{,}0005$$

(с запасом для ошибки округления).

Итак, получаем:

$$\frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}125$$

$$\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}00260\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}00002\ldots\ldots,$$

мы видим, что начиная с этого члена ряда, остальные можно отбросить, и приходим к равенству:

$$\cos\frac{1}{2} \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Округлять здесь придется один последний член, а потому будет достаточно вычислить его с 4 знаками; теперь заканчиваем вычисления:

$$1 = 1{,}0000$$

$$\underline{\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0{,}0026}$$

$$1{,}0026$$

$$\underline{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}1250}$$

$$0{,}8776$$

Итак, получим:

$$\cos\frac{1}{2} \approx 0{,}878 .$$

4. Вычисление логарифмов.

В § 39 было получено разложение:

$$\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\cdot\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right\},$$

имеющее место при $|x| < 1$.

С целью получить ряд, удобный для вычисления $\lg(N+h)$, если известен $\lg N$, положим:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N} ,$$

откуда:

$$x = \frac{h}{2N+h} ;$$

тогда
$$\lg\frac{1+x}{1-x} = \lg(N+h) - \lg N ,$$

и получается формула:

$$\lg(N+h) = \lg N + 2\cdot\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right\},$$

где x имеет указанное выше значение.

Если теперь приближенно положить:

$$\lg(N+h) \approx \lg N + 2\cdot\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right\} \quad (5),$$

то погрешность этого равенства выражается остатком ряда:

$$R_n = 2\left\{\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} + \dots\right\}.$$

Преобразуем это выражение; заменив в правой части всех знаменателей на $(2n+1)$, мы ее увеличим, так что:

$$R_n < 2\left\{\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+3}}{2n+1} + \frac{x^{2n+5}}{2n+1} + \dots\right\}$$

$$R_n < 2\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\left\{1 + x^2 + x^4 + \dots\right\}$$

$$R_n < \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1-x^2} \quad \dots\dots \quad (6)$$

Таким образом, найдена высшая граница погрешности, происходящей от отбрасывания членов ряда.

Надо заметить, что по формуле (5) мы найдем натуральный логарифм; для того, чтобы получить десятичный, надо полученное число, как известно, умножить на модуль:

$$M \approx 0{,}43429.$$

Пример I. Вычислить $\lg 2$ с 5 десятичными знаками.

Выше мы получили для $\lg 2$ весьма медленно сходящийся ряд; здесь будет иное. В формуле (5) полагаем:

$$N = h = 1;\ \text{причем}\quad x = \frac{h}{2N+h} = \frac{1}{3};$$

тогда имеем:

$$\lg 2 \approx 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}\right\},$$

причем погрешность этого приближенного равенства будет:

$$R_n < \frac{2}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}$$

или:

$$R_n < \frac{2}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\cdot\frac{9}{8}$$

$$R_n < \frac{1}{4(2n+1)}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$$

Так как требуется получить 5 верных знаков, то надо n подобрать так, чтобы:

$$R_n < 0,000005$$

и притом, чтобы был запас для ошибок округлений.

При $n=4$ имеем:

$$R_4 < \frac{1}{36}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0,00001\ldots ;$$

граница погрешности еще слишком велика, так что берем $n=5$:

$$R_5 < \frac{1}{44}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9 = 0,00000115\ldots\ldots$$

Мы убеждаемся, что достаточно будет взять $n=5$; тогда:

$$\lg 2 \approx 2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\right\}.$$

Попробуем каждое из слагаемых вычислять с 6 знаками; тогда высшая граница погрешности округления в сумме будет:

$$(0,0000005).5 = 0,0000025;$$

но эта сумма умножается на 2, вследствие чего и погрешность удвоится и может достигнуть величины:

$$0,000005;$$

складываясь с R_5 она может превысить указанную нам границу. Но если вычислять каждое слагаемое с 7 знаками, то все требования будут удовлетворены. Заканчиваем вычисления:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= 0,3333333\\
\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 &= 0,0123457\\
\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 &= 0,0008231\\
\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 &= 0,0000653\\
\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9 &= 0,0000056\\
\hline
&\ 0,3465730\\
&\ \times 2\\
\hline
&\ 0,6931460
\end{aligned}$$

округляя до 5 знаков, находим:

$$\lg 2 \approx 0{,}69315.$$

Пример 2. Желая вычислить $\lg 3$, полагаем:

$$N=2 \quad \text{и} \quad h=1, \quad \text{причем} \quad x=\frac{1}{5},$$

и получаем ряд:

$$\lg 3 = \lg 2 + 2\left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \cdots\right\};$$

зная $\lg 2$, можно подобно предыдущему найти $\lg 3$ (с 4 знаками будет $\lg 3 \approx 1{,}0986$).

Зная $\lg 2$ и $\lg 3$ можно найти логарифмы:

$$\lg 4 = 2\lg 2$$

$$\lg 6 = \lg 2 + \lg 3$$

$$\lg 8 = 3\lg 2$$

$$\lg 9 = 2\lg 3, \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом можно ограничиться вычислением с помощью ряда только логарифмов простых чисел.

5. Некоторые приближенные формулы.

Из предыдущих примеров можно усмотреть, что чем меньше будет значение аргумента, тем меньшим числом членов ряда можно ограничиться для достижения требуемой точности. При достаточно малом x, можно ограничиваться первыми или вторыми его степенями; таким путем получаются следующие приближенные формулы, имеющие место для достаточно малых значений аргумента и применяемые на практике:

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\lg(1 \pm x) \approx \pm x$$

$$(1 \pm x)^m \approx 1 \pm mx.$$

Следует отметить также различные частные случаи последней формулы:

$$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{2}$$

$$\sqrt[3]{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{3} \quad \text{и т.д.}$$

Пример I. Вычислить приближенное значение

$$\frac{1}{\sqrt[3]{0,997}},$$

воспользовавшись одной из последних формул.

Здесь мы имеем:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{0,997}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 0,003}} \approx 1 + 0,001 \approx 1,001.$$

Какова точность этого приближенного равенства? Для ответа на этот вопрос вспомним, что мы ограничились здесь двумя первыми членами биномиального ряда:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{1.2} \cdot x^2 + \ldots\ldots;$$

следовательно, погрешность по абсолютному значению будет меньше 3-го члена:

$$\frac{2}{9} x^2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{10^6} = \frac{1}{5.10^5},$$

так что полученные выше 3 десятичных знака - безусловно верны.

Пример 2. В курсе пиродинамики (курс проф.Граве, стр. 86-87) встречается формула:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\theta^2} - \frac{2B}{Rq}(\tau - \tau_\kappa)}};$$

требуется разложить V по степеням разности $(\tau-\tau_\kappa)$, ограничиваясь ее первой степенью. Перепишем V следующим образом:

$$V = \frac{\theta}{\sqrt{1 - \frac{2B\theta^2}{Rq}(\tau - \tau_\kappa)}} = \theta \cdot \left\{1 - \frac{2B\theta^2}{Rq}(\tau - \tau_\kappa)\right\}^{-\frac{1}{2}};$$

далее, пользуясь биномиальным рядом, получаем:

$$V \approx \theta\left\{1 + \frac{B\theta^2}{Rq}(\tau - \tau_\kappa)\right\};$$

разность $(\tau - \tau_\kappa)$ предполагается достаточно малой по абсолютному значению.

Примеры для упражнения.

1) Вычислить $\sqrt{e}$ с 3 десятичными знаками.
Ответ: 1,649.

2) Вычислить $\frac{1}{e}$ с 3 десятичными знаками.
Ответ: 0,368.

3) Вычислить $\sin hyp\, 1$ с 3 десятичными знаками.
Ответ: 1,175.

4) Вычислить $\sin 16^\circ$ с 2 десятичными знаками.
Ответ: 0,28.

5) Вычислить $\sin 0{,}4$ с 4 десятичными знаками.
Ответ: 0,3894.

6) Вычислить косинус радиана с 3 десятичными знаками.

Ответ: 0,540.

7) Для каких углов приближенное равенство:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

дает величину синуса с 2 десятичными знаками?

Ответ: для углов, не превышающих 51°.

(при решении задачи полезно знать, что $9^5 = 59049$).

8) Вычислить $\lg 5$ с 4 знаками.

Ответ: 1,6094

(здесь надо положить: $N=4$ и $h=1$).

9) Вычислить $\lg 10$ с 4 знаками.

Ответ: 2,3026.

10) Вычислить $\sqrt{1{,}0004}$ по одной из приближенных формул.

Ответ: 1,0002.

11) Вывести приближенную формулу:

$$a^x \approx 1 + x \lg a.$$

12) Задачник математической кафедры №№ 160 и 161.

6. Вычисление определенных интегралов с помощью разложения в ряд.

Если дело идет о вычислении интеграла:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

и если неопределенный интеграл не берется в конечном виде, то можно приближенно вычислить определенный интеграл по формулам квадратур (см. выше); другим способом является разложение в ряд. Пусть под'интегральная функция, для всех значений x в данном промежутке разлагается в ряд:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots\cdots;$$

весьма часто, но не всегда, это будет ряд Маклорена. Теорема о том, что "интеграл суммы равен сумме интегралов", была доказана для конечного числа слагаемых, и применить ее здесь непосредственно нельзя. Поэтому напишем разложение данной функции с остаточным членом:

$$(*)\ldots\ f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+R_n(x);$$

для сходящегося ряда должно быть:

$$\lim_{n\to\infty}\left[R_n(x)\right]=0.$$

Это условие надо понимать следующим образом: как бы ни было мало заданное число $\varepsilon>0$, всегда найдется такое целое и положительное число N, что для значений $n>N$ будет иметь место неравенство:

$$\left|R_n(x)\right|<\varepsilon;$$

при этом выбор числа N не зависит от того значения, которое x может иметь в промежутке $(x_0;\ X)$. При наличии указанного свойства, наш ряд называется "равномерно сходящимся" (о чем было упомянуто выше в § 37); выведенные в § 39 ряды все обладают этим свойством.

Равенство $(*)$ мы имеем право интегрировать почленно, и получаем:

$$(**)\ldots\ \int_{x_0}^{X}f(x)dx=\int_{x_0}^{X}f_1(x)dx+\int_{x_0}^{X}f_2(x)dx+\cdots$$
$$\cdots+\int_{x_0}^{X}f_n(x)dx+\int_{x_0}^{X}R_n(x)dx;$$

докажем теперь, что при $n\to\infty$ интеграл от остаточного члена стремится к 0. Действительно, абсолютное значение суммы меньше или равно сумме абсолютных значений ее слагаемых; а так как определенный интеграл есть предел суммы, то можно написать:

$$\left| \int_{x_0}^{X} R_n(x)\,dx \right| \leq \int_{x_0}^{X} |R_n(x)|\,dx$$

(мы считаем $X > x_0$, так что $dx > 0$); на основании неравенства:

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

имеем

$$\int_{x_0}^{X} |R_n(x)|\,dx < \varepsilon \int_{x_0}^{X} dx;$$

вычисляя последний интеграл, получаем окончательно:

$$\left| \int_{x_0}^{X} R_n(x)\,dx \right| < \varepsilon \cdot (X - x_0);$$

а так как ε можно взять произвольно малым, то наше утверждение - доказано. Если же интеграл от остаточного члена стремится к 0 при $n \to \infty$, то ряд интегралов, стоящих в правой части равенства (**), будет сходящимся а его сумма равна данному интегралу.

Итак, можно написать:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} f_2(x)\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{X} f_n(x)\,dx + \cdots;$$

другими словами мы доказали, что равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать.

Применим прежде всего эту теорему к разложению в ряд Маклорена $\operatorname{arctg} x$; метод § 39 здесь был бы довольно сложен. Легко видеть справедливость следующего равенства:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2};$$

разложим в ряд Маклорена под'интегральную функцию, для чего можно воспользоваться биномиальным рядом или формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots, \text{ где } |q| < 1;$$

полагая здесь $q = -x^2$, получаем разложение:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots,$$

верное при $|x| < 1$.

Применяя доказанное выше правило, можем написать:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \int_0^x x^6 dx + \cdots,$$

откуда:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots$$

Таким образом, найдено разложение $\operatorname{arctg} x$ в степенной ряд; оно имеет место для значений x, удовлетворяющих условию:

$$|x| < 1.$$

Можно дополнительно доказать, что оно остается в силе и для $x = \pm 1$; тогда при $x = +1$, получаем разложение числа π в бесконечный ряд, а именно:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Разобрав вопрос о разложении $\operatorname{arctg} x$, перейдем к примерам на применение доказанной выше теоремы.

<u>Пример I.</u> Найти разложение интеграла:

$$\int_0^{\alpha} e^{-t^2} \cdot dt$$

в ряд по степеням α (т. Гельвих "Теория ошибок", ч.I, стр. 31-32).

Известный нам ряд:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$

в настоящем случае дает:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{1.2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots\cdots;$$

интегрируя почленно, получаем:

$$\int_0^{\alpha} e^{-t^2} dt = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{1}{1.2}\,\frac{\alpha^5}{5} - \frac{1}{3!}\,\frac{\alpha^7}{7} + \frac{1}{4!}\,\frac{\alpha^9}{9} - \cdots\cdots$$

Пример 2. Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

с 3 десятичными знаками.

Полагая в предыдущем разложении $\alpha = 1$, находим:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{11} + \cdots;$$

так как ряд - знакопеременный, то надо удержать столько членов, чтобы первый из отброшенных был по абсолютной величине меньше числа:

$$0{,}0005$$

(с запасом для погрешности округления).

Вычисляем члены нашего ряда, начиная с 4-го:

$$\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7} = 0{,}02380 \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{9} = 0{,}00462 \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{11} = 0{,}00075 \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{6!}\,\frac{1}{13} = 0{,}00004 \cdots\cdots$$

очевидно, можно остановиться на члене $\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{11}$, и получается приближенная формула:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{4!}\frac{1}{9}\ \frac{1}{5!}\frac{1}{11}.$$

При вычислении придется округлять бесконечные десятичные дроби в 4 членах; если каждую из них вычислять с 4 верными знаками, то высшая граница погрешности для каждого члена будет:

0,00005,

а для их суммы:

0,0002;

складываясь с указанной выше погрешностью, она не превзойдет поставленной нам границы.

Проводим самые вычисления:

$$1 = 1,0000 \qquad \frac{1}{3} = 0,3333$$

$$\frac{1}{10} = 0,1000 \qquad \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7} = 0,0238$$

$$\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{9} = 0,0046 \qquad \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{11} = 0,0008$$

$$1,1046 \qquad 0,3579$$

$$\begin{array}{r} 1,1046 \\ -\ 0,3579 \\ \hline 0,7467 \end{array}$$

В результате имеем: $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0,747.$

<u>Примеры для упражнения.</u>

1) Задачник математической кафедры № 167.

2) Разложить в ряд Маклорена $\arcsin x$.

Указание: воспользоваться рядом для $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, введенным в § 39.

<u>Ответ:</u> $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots$

при $|x|<1$.

3) Вычислить $\int_0^{1/2} \cos(x^2)\,dx$ с 3 десятичными знаками.

<u>Ответ:</u> 0,497.

4) Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ с 2 десятичными знаками.
Ответ: 0,62.

§ 41. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.

I. Пусть нам задана функция, которая представлена в виде отношения двух других функций:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Для всякого значения аргумента, при котором знаменатель не равен 0, наше отношение имеет определенное конечное значение. Пусть при некотором $x=a$ имеем $f(a)=0$ и $\varphi(a)\neq 0$; тогда данное выражение теряет смысл, ибо на 0 делить нельзя; но принимая во внимание, что в случае, когда знаменатель стремится к 0, а числитель не является величиной бесконечно-малой, вся дробь беспредельно растет по абсолютному значению, - мы говорим, что при указанных условиях наше отношение равно ∞.

Если же при $x=a$, имеем сразу:

$$f(a)=0 \text{ и } \varphi(a)=0,$$

то мы ничего еще не можем заключить о значении данной функции, и в таком случае говорят, что получилась неопределенность вида:

$$\frac{0}{0}$$

При этом весьма часто оказывается, что если вместо того, чтобы сразу подставить $x=a$, будем искать предел данного отношения при $x\to a$, то этот предел существует и равен определенному числу A:

$$\lim\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x\to a}=A;$$

тогда это A называется истинным значением полученной выше неопределенности, а самый процесс нахождения его называется раскрытием неопределенности.

Пусть, например, дана функция:

$$\frac{\sin x}{x};$$

при $x=0$ она получает неопределенный вид $\frac{0}{0}$; но мы знаем, что:

$$\lim\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{x\to 0}=1,$$

и таким образом истинное значение нашей неопределенности $=1$.

Возьмем для другого примера отношение:

$$\frac{x^2-a^2}{x-a};$$

при $x=a$ оно получает вид $\frac{0}{0}$; но:

$$\lim\left[\frac{x^2-a^2}{x-a}\right]_{x\to a}=\lim\left[x+a\right]_{x\to a}=2a,$$

и неопределенность - раскрыта.

Решая задачи в § 4 на разыскание пределов, мы в некоторых случаях уже раскрывали подобные неопределенности; но не всегда можно обойтись такими простыми средствами, а потому приходится призвать на помощь дифференциальное исчисление.

Условимся обозначать истинное значение неопределенности, с которой шла речь выше, следующим символом:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a},$$

и докажем теорему.

Если отношение: $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ при $x=a$

принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$, и если отношение производных:

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$$

имеет определенное значение при $x=a$, то истинное значение данного отношения равно значению отношения производных:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a}.$$

Предполагая, что наши функции имеют непрерывные производные, разложим их по степеням $(x-a)$, воспользовавшись формулой Тейлора и взяв $n=2$:

$$\varphi(x)=\varphi(a)+(x-a)\,\varphi'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\cdot\varphi''(\xi)$$

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\cdot f''(\xi_1),$$

где ξ и ξ_1 суть некоторые числа, заключенные по своей величине между a и x. Вспоминая, что:

$$\varphi(a)=0 \quad \text{и} \quad f(a)=0,$$

отсюда находим отношение:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{(x-a)\,\varphi'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2\,\varphi''(\xi)}{(x-a)\,f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2\,f''(\xi_1)},$$

или:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi'(a)+\frac{1}{2}(x-a)\,\varphi''(\xi)}{f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)\,f''(\xi_1)} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Перейдем теперь к пределу, устремляя x к a; очевидно в пределе получим:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a}=\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}.$$

Если $f'(a)$ не $=0$, то правая часть имеет определенное конечное значение (в частности при $\varphi'(a)=0$, оно равно 0); если $f'(a)=0$, а $\varphi'(a)\neq 0$, то правая часть равенства $(*)$ безгранично растет по абсолютной величине при $x\to a$; тоже самое будет иметь место и для данного отношения. Словом, если хоть одно из чисел:

$$\varphi'(a) \quad \text{и} \quad f'(a)$$

не равно нулю, то наша неопределенность - раскрыта, что и требовалось доказать.

Но может случиться, что отношение производных само принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$; это будет в том случае, когда оба числа $\varphi'(a)$ и $f'(a)$ равны нулю; тогда к этому отношению в свою очередь применяем доказанную теорему, и переходим к отношению вторых производных, и т.д.

Таким образом можем написать:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{\varphi''(x)}{f''(x)}\right]_{x=a}=\ldots\ldots;$$

мы продолжаем переходить к производным высшего порядка до тех пор, пока не дойдем до такого отношения, у которого по крайней мере один из членов не равен 0; в таком случае неопределенность будет раскрыта. Изложенное правило носит название "правила Лопиталя".

<u>Пример I.</u> Найти $\left[\frac{x-\sin x}{x^3}\right]_{x=0}$;

так как данное отношение при $x=0$ принимает вид $\frac{0}{0}$, то применяем правило Лопиталя:

$$\left[\frac{x-\sin x}{x^3}\right]_{x=0} = \left[\frac{1-\cos x}{3x^2}\right]_{x=0} \quad ;$$

отношение производных тоже имеет вид $\frac{0}{0}$, поэтому идем дальше, пока не исчезнет неопределенность отношения:

$$\left[\frac{1-\cos x}{3x^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{\sin x}{6x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\cos x}{6}\right]_{x=0} = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. Если тяжелая материальная точка падает в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, то для скорости точки имеем выражение:

$$v = \frac{1}{k}\cdot\frac{e^{-kgt} - e^{kgt}}{e^{-kgt} + e^{kgt}},$$

где k есть коэффициент пропорциональности. Спрашивается, что даст это выражение, если пренебречь сопротивлением среды, т.е. если положить $k=0$?

Непосредственная подстановка $k=0$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$; однако, прежде чем применять правило Лопиталя, можно упростить вопрос на основании теоремы, что предел произведения равен произведению пределов:

$$\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{-kgt} - e^{kgt}}{e^{-kgt} + e^{kgt}}\right]_{k=0} = \left[\frac{e^{-kgt} - e^{kgt}}{k}\right]_{k=0} \cdot \left[\frac{1}{e^{-kgt} + e^{kgt}}\right]_{k=0} =$$

$$= \left[\frac{e^{-kgt} - e^{kgt}}{k}\right]_{k=0} \cdot \frac{1}{2}$$

Далее имеем:

$$\left[\frac{e^{-kgt} - e^{kgt}}{k}\right]_{k=0} = \left[\frac{(e^{-kgt} - e^{kgt})'_k}{1}\right]_{k=0} = \left[-gt(e^{-kgt} + e^{kgt})\right]_{k=0} =$$

$$= -2gt;$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$v=-gt,$$

т.е. выражение для скорости при падении в пустоте (знак минус появился потому, что координатная ось была направлена вверх).

ЗАМЕЧАНИЕ. Во всем предыдущем предполагалось, что число a, при котором получается неопределенность, есть число конечное; но правило Лопиталя сохраняет силу и в том случае, когда получается неопределенность при $x=\infty$.

Действительно, полагая:

$$x=\frac{1}{y},$$

имеем:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{\varphi(\frac{1}{y})}{f(\frac{1}{y})}\right]_{y=0};$$

к правой части уже можно применить правило Лопиталя:

$$\left[\frac{\varphi(\frac{1}{y})}{f(\frac{1}{y})}\right]_{y=0}=\left[\frac{\varphi'(\frac{1}{y})\cdot(-\frac{1}{y^2})}{f'(\frac{1}{y})\cdot(-\frac{1}{y^2})}\right]_{y=0}=\left[\frac{\varphi'(\frac{1}{y})}{f'(\frac{1}{y})}\right]_{y=0}=$$

$$=\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=\infty}$$

Таким образом находим:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=\infty},$$

что и требовалось доказать.

Надо заметить, что в процессе применения правила Лопиталя, иногда выясняется, что этот способ не может привести нас к решению вопроса; тогда надо искать предел каким-либо иным путем.

К раскрытию неопределенности можно иногда с успехом применять разложение в ряд. Так, для отношения примера 1 имеем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots$$

$$\left[\frac{x - \sin x}{x^3}\right]_{x=0} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

2. Кроме рассмотренной, встречаются еще неопределенности других видов. Пусть по-прежнему имеем отношение:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)};$$

если при $x=a$ знаменатель обратится в бесконечность, а числитель будет величиной ограниченной, то наше отношение обращается в 0; если же числитель обращается в ∞, а знаменатель остается величиной ограниченной, то вся дробь обращается в ∞. Но если оба члена отношения сразу обращаются в бесконечность:

$$\varphi(a)=\infty \quad и \quad f(a)=\infty,$$

то о значении дроби нельзя сделать общего заключения, и говорят, что получается неопределенность вида:

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Раскрытие этой неопределенности производится тоже по правилу Лопиталя.

<u>Доказательство</u>. Допустим существование истинных значений как отношения данных функций, так и отношения их производных и введем следующие обозначения: $\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a} = A$ и $\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a} = B$,

и пусть $A \neq 0$.

Очевидно, имеет место такое тождество:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

Теперь правая часть принимает при $x=a$ неопределенный вид $\frac{0}{0}$; на этом основании к раскрытию последней неопределенности можно применить правило Лопиталя:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a} = \left[\frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}\right]_{x=a} =$$

$$= \left[\frac{\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}}{\frac{-\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}\right]_{x=a} = \left[\frac{f'(x)\cdot[\varphi(x)]^2}{\varphi'(x)\cdot[f(x)]^2}\right]_{x=a} =$$

$$\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} \cdot \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]^2_{x=a};$$

последнее равенство получается на основании теорем о пределах. Пользуясь введенными выше обозначениями, можно написать:

$$A = \frac{1}{B} \cdot A^2,$$

откуда:

$B = A$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь:

$$A = 0, \quad т.е.: \quad \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a} = 0.$$

В этом случае начнем с рассмотрения суммы:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \pm 1 = \frac{\varphi(x) \pm f(x)}{f(x)};$$

знак выбираем так, чтобы при $x=a$ функция $\pm f(x)$ обращалась в бесконечность того же знака, что и $\varphi(x)$.

Легко видеть, что:

$$\left[\frac{\varphi(x)\pm f(x)}{f(x)}\right]_{x=a} = \pm 1 ;$$

это следует из предыдущего равенства и сделанных выше условий. С другой стороны здесь имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, причем ее истинное значение не $=0$; следовательно, по предыдущему можно применить правило Лопиталя:

$$\left[\frac{\varphi(x)\pm f(x)}{f(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{\varphi'(x)\pm f'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\pm 1\right]_{x=a} =$$

$$= \left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a} \pm 1 .$$

Полученное выражение должно $=\pm 1$, (см.выше), так что:

$$\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a} = 0,$$

т.е. и здесь оба отношения имеют одно и то же значение.

Наконец, в случае:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a} = \infty ,$$

можно перейти к обратному отношению.

<u>Пример 3.</u> Найти значение отношения:

$$\frac{x^n}{e^x} \text{ при } x=+\infty ;$$

здесь n обозначает целое положительное число.

Отношение получает вид $\frac{\infty}{\infty}$; правило Лопиталя здесь придется применять n раз, пока не получим в числителе постоянного числа:

$$\left[\frac{x^n}{e^x}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{n x^{n-1}}{e^x}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}\right]_{x=\infty} = \dots$$

$$\dots = \left[\frac{n(n-1)\dots 2.1}{e^x}\right]_{x=\infty} = 0.$$

Отсюда видно, что показательная функция e^x растет бесконечно быстрее, чем любая степень аргумента.

Пример 4. Найти предельное значение скорости при падении в сопротивляющейся среде (см. выше пример 2).

Дело идет о вычислении предела отношения:

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{-kgt} - e^{kgt}}{e^{-kgt} + e^{kgt}} \quad при \quad t \to \infty.$$

Получается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$; но прежде чем применять правило Лопиталя, приведем данное выражение к такому виду:

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - e^{2kgt}}{1 + e^{2kgt}};$$

далее имеем:

$$\left[\frac{1}{k} \cdot \frac{1 - e^{2kgt}}{1 + e^{2kgt}}\right]_{t=\infty} = \frac{1}{k} \cdot \left[\frac{-2kg \cdot e^{2kgt}}{2kg \cdot e^{2kgt}}\right]_{t=\infty} = -\frac{1}{k}$$

Итак:

$$[v]_{t=\infty} = -\frac{1}{k}.$$

3. Кроме двух рассмотренных неопределенностей, имеющих основное значение, существуют еще неопределенности других видов; мы рассмотрим их на примерах.

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$

Для ее раскрытия, надо произведение данных функций представить в виде частного, и дело сведется к основным неопределенностям.

Пример 5. $\left[x^{\alpha}\cdot \lg x\right]_{x=0}$, где $\alpha>0$.

Здесь $x^{\alpha}\to 0$, а $\lg x\to -\infty$, так что получается неопределенность указанного вида.

Перепишем данное произведение следующим образом:

$$x^{\alpha}\cdot \lg x=\frac{\lg x}{x^{-\alpha}},$$

и тогда, при $x=0$, получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Теперь можно применить правило Лопиталя:

$$\left[\frac{\lg x}{x^{-\alpha}}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}}\right]_{x=0}=\left[\frac{x^{\alpha}}{-\alpha}\right]_{x=0};$$

последнее выражение получается с помощью упрощения предыдущего, и подобные упрощения всегда надо делать; но:

$$\left[\frac{x^{\alpha}}{-\alpha}\right]_{x=0}=0,$$

так что:

$$\left[x^{\alpha}\cdot \lg x\right]_{x=0}=0.$$

Пример 6. $\left[\frac{n}{2}(2^{\frac{1}{n}}-1)\right]_{n=\infty}$

(т.Гельвич "Теория ошибок",ч. I,стр.97).

Здесь I-й множитель $\to\infty$, а 2-й $\to 0$, так как $2^{1/n}\to 1$ при $n\to\infty$.

Согласно сказанному выше имеем:

$$\left[\frac{n}{2}\cdot(2^{1/n}-1)\right]_{n=\infty}=\left[\frac{2^{1/n}-1}{2n^{-1}}\right]_{n=\infty}=\left[\frac{(2^{1/n}-1)'_n}{2(n^{-1})'_n}\right]_{n=\infty}=$$

$$=\left[\frac{2^{1/n}\cdot\lg 2\cdot(-\frac{1}{n^2})}{2\cdot(-1)n^{-2}}\right]_{n=\infty}=\left[\frac{2^{1/n}\cdot\lg 2}{2}\right]_{n=\infty}=\frac{1}{2}\lg 2.$$

Неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞.

Сначала находим логарифм данного выражения; во всех 3 случаях он имеет неопределенный вид $0.\infty$; раскрывая эту неопределенность по предыдущему и потенцируя, получаем само выражение.

Пример 7 $\left[\left(1-\frac{v}{v_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon v_1}\right]_{\varepsilon=0}$

(Профессор Граве "Пиродинамика", стр. 112)

Здесь имеем неопределенность вида ∞^0.

Обозначим:

$$y=\left[\left(1-\frac{v}{v_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon v_1}\right]_{\varepsilon=0};$$

тогда:

$$\lg y=\left[\varepsilon v_1\cdot\lg\left(1-\frac{v}{v_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]_{\varepsilon=0},$$

и здесь уже имеем вид $0.\infty$.

Далее имеем:

$$\lg y=v_1\left[\frac{\lg\left(1-\frac{v}{v_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{-1}}\right]_{\varepsilon=0}=v_1\left[\frac{\frac{v}{v_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}}{\left(1-\frac{v}{v_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right).(-1)\varepsilon^{-2}}\right]_{\varepsilon=0}=$$

$$=-v\cdot\left[\frac{1}{1-\frac{v}{v_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}}\right]_{\varepsilon=0}=0;$$

или $\lg y=0$, то $y=1$.

Пример 8 $\left[\frac{\alpha}{\beta+8\cdot\rho^{8/n}}\right]^n_{n=\infty}$, где $\alpha,\beta,8$ таковы, что $\frac{\alpha}{\beta+8}=1$.

(проф. Дроздов "Сопротивление артиллерийских орудий," ч. I, стр. 127).

При $n\to\infty$ имеем $\rho^{8/n}\to1$, и таким образом получается неопределенность вида 1^∞.

Согласно сказанному, пишем:

$$y=\left[\frac{\alpha}{\beta+8\cdot\rho^{8/n}}\right]^n_{n=\infty}$$

$$\lg y = \left[n\left\{\lg\alpha - \lg(\beta+\gamma\cdot\rho^{2/n})\right\}\right]_{n=\infty}$$

$$\lg y = \left[\frac{\lg\alpha - \lg(\beta+\gamma\cdot\rho^{2/n})}{n^{-1}}\right]_{n=\infty} = \left[\frac{-\gamma\,\rho^{2/n}\,\lg\rho\,(-\frac{2}{n^2})}{(\beta+\gamma\cdot\rho^{2/n})(-1)n^{-2}}\right]_{n=\infty} =$$

$$= \left[\frac{-2\gamma\,\rho^{2/n}\,\lg\rho}{\beta+\gamma\cdot\rho^{2/n}}\right]_{n=\infty} = -\frac{2\gamma}{\beta+\gamma}\cdot\lg\rho$$

$$\lg y = \lg\left\{\rho^{-\frac{2\gamma}{\beta+\gamma}}\right\}$$

$$y = \frac{1}{\rho^{\frac{2\gamma}{\beta+\gamma}}}$$

В курсе профессора Дроздова, в частности, рассматривается случай, когда:

$$\alpha = 1,\ \beta = 2 \ \text{ и } \ \gamma = -1;$$

в этом случае будет:

$$y = \frac{1}{\rho^{-2}} = \rho^2.$$

Неопределенность вида $\infty - \infty$. Эта неопределенность путем преобразования обычно сводится к виду $\frac{0}{0}$.

Пример 9. $\left[\frac{1}{x} - \mathrm{ctg}\,x\right]_{x=0}$

Здесь уменьшаемое и вычитаемое оба обращаются в бесконечность одного и того же знака, так что получается $\infty-\infty$. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{1}{x} - \mathrm{cotg}\,x = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x};$$

в правой части теперь получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Далее имеем:

$$\left[\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\cos x + x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x}\right]_{x=0} =$$

$$= \left[\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x}\right]_{x=0} = \frac{0}{2} = 0;$$

следовательно:

$$\left[\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right]_{x=0} = 0.$$

Примеры для упражнения.

1) Задачник математической кафедры № 96.

2) $\left[\frac{\lg\cos x}{\sin^2 x}\right]_{x=0}$ Ответ: $-\frac{1}{2}$

3) $\left[(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right]_{x=1}$ Ответ: $\frac{2}{\pi}$

4) $\left[x^x\right]_{x=0}$ Ответ: 1.

5) $\left[\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}$ Ответ: 3.

§ 42. ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ; ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ.

1. Основные понятия и определения. Пусть мы имеем несколько переменных $x, y, z, \ldots t$ независимых между собой, т.е. таких переменных, что каждое из них может принимать любые значения в своей области изменения независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные. Если существует еще одна переменная величина u, связанная с данными переменными независимыми так, что каждой системе значений незави-

симых переменных

$$x_0, y_0, z_0, \ldots t_0$$

соответствует одно или несколько вполне определенных значений переменной u, то эта последняя переменная называется функцией от переменных независимых

$$x, y, z, \ldots t$$

и обозначается так:

$$u = f(x, y, z, \ldots t).$$

П р и м е р ы.

Об'ем параллелепипеда v есть функция трех его измерений:

$$v = xyz.$$

Дальность полета снаряда в пустоте D есть функция начальной скорости v_0 и угла бросания α:

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \qquad \text{и т.д.}$$

Подобно функциям от одной переменной, функции от нескольких переменных также делятся на однозначные и многозначные. Однозначной функция от нескольких переменных называется в том случае, если каждой системе значений переменных независимых соответствует только одно значение функции. Многозначной же функция от нескольких переменных называется тогда, когда каждой системе значений независимых переменных соответствует несколько значений функции.

Например, функция $u = \sin(2x + 3y + 5z) + 5y^2z$ является функцией однозначной, а функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + \sin z}$, является функцией двухзначной, так как каждой системе значений x, y и z соответствуют два значений функции u — одно положительное и другое отрицательное. Точно также функция

$$u = \operatorname{arctg}(x + 4y - z)$$

сеть многозначная функция от трех переменных x, y и z, так как каждой системе значений x, y и z соответствует бесчисленное множество значений

$$\operatorname{arctg}(x + 4y - z), \text{ т.е. } u.$$

Для каждой функции от нескольких переменных независимых существует своя область определения, т.е. такая совокупность значений независимых переменных, для которых функция определена. Например, функция

$$u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

определена для тех значений x и y, которые удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 4$, т.е., выражаясь геометрическим языком, эта функция определена в точках, лежащих внутри или на границах окружности:

$$x^2 + y^2 = 4\ ,$$

так как для всех точек лежащих вне этой окружности

$$x^2 + y^2 > 4.$$

Функция $u = \dfrac{z}{x-y}$ определена во всех точках плоскости, кроме точек прямой $x = y$, так как в точках этой прямой знаменатель нашей дроби обращается в нуль. Введем теперь понятие о непрерывности функции от нескольких переменных. Пусть нам дана какая-нибудь функция от нескольких переменых независимых

$$u = f(x, y, z, \ldots t).$$

Выберем некоторую систему значений независимых переменных

$$x_0, y_0, z_0, \dots t_0.$$

Соответствующее значение функции будет:

$$u_0 = f(x_0; y_0; z_0 \dots t_0).$$

Придадим теперь выбранным значениям независимых переменных приращения $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \dots \Delta t_0$.

Тогда и функция получит некоторое приращение Δu, которое, очевидно, равняется

$$\Delta u = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z \dots t_0+\Delta t) - f(x_0, y_0 \dots t_0)$$

Если при бесконечно малых $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \dots \Delta t_0$, приращение Δu также есть величина бесконечно малая, то функция $u = f(x, y, z, \dots t)$ называется непрерывной для системы значений $x_0, y_0, z_0, \dots \dots t_0$.

Условимся говорить, что функция u непрерывна в точке $(x_0, y_0, z_0, \dots t_0)$

Если функция от нескольких переменных независимых непрерывна во всех точках некоторой области, то говорят, что эта функция непрерывна в данной области.

2. Частные производные. Условимся для простоты рассматривать только функции от трех, а в некоторых случаях только от двух независимых переменных.

Все полученные нами правила и результаты могут быть обобщены на случай функции от любого числа независимых переменных.

Пусть нам дана функция от трех переменных $u = f(x,y,z)$

Выберем теперь систему значений независимых переменных: $x_0; y_0; z_0$. Соответствующее значение функции есть $u_0 = f(x_0; y_0; z_0)$

Дадим теперь x_0 приращение Δx_0, а значения y и z оставим без изменения. Тогда функция u также получит приращение

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Назовем это приращение частным приращением функции u. Составим теперь отношение

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

Если при стремлении Δx к нулю это отношение стремится к определенному пределу, то этот предел называется частной производной от функции $u = f(x, y, z)$ по x в точке (x_0, y_0, z_0) обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial x}$ или $\frac{\partial f}{\partial x}$. Таким образом имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

Условимся в дальнейшем писать просто

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

подразумевая под x, y и z координаты некоторой определенно выбранной точки.

Совершенно также получаются частные производные от функции u по остальным переменным независимым в точке (x, y, z)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Каким же путем вычислять частную производную от функции $u = f(x, y, z)$ по какой-либо независимой переменной?

Так как по определению частная производная по x получается тогда, когда меняется только x, а значения y и z остаются постоянными, то эту производную надо вычислять по тем же правилам, по которым мы вычисляем производную функции от одной переменной независимой, надо только считать при этом y и z числами постоянными. Точно также при вычислении частной производной по y надо считать постоянными x и z, а при вычислении частной производной по z надо считать постоянными x и y.

Примеры.

1) $u = x^2 + 3xy + 4y^2$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + 8y$.

2) $u = \sin(3x + 5y - 4z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\cos(3x + 5y - 4z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 5\cos(3x + 5y - 4z).$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -4\cos(3x + 5y - 4z).$$

3) $u = e^{x/y}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{x/y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{x/y}$.

Примеры для упражнений.

Найти частные производные от следующих функций

1) $z = ax + by + c$; Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = a$; $\frac{\partial z}{\partial y} = b$.

2) $z = x^n + y^n$ Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = ny^{n-1}$.

3) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$

4) $z = \cos(ax + by)$ Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = -a\sin(ax + by)$.

$\frac{\partial z}{\partial y} = -b\sin(ax + by)$.

5) $u = x^{\sin y}$ Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x} = x^{\sin y - 1}\sin y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\sin y}\cos y \cdot \lg x$.

6) $u = y\sin x + \sin y$ Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y$

7) $u = z^{xy}$; Отв: $\frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z.$$

3. Дифференциалы функций от нескольких переменных.

Приращения независимых переменных, которые обычно считаются бесконечно малыми, называются их дифференциалами и обозначаются так:

$$dx,\ dy \text{ и } dz,$$

так что $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$; $dz = \Delta z$. Частным дифференциалом какой-нибудь функции $u = f(x,y,z)$ по независимой переменной x называется произведение частной производной от этой функции по x на дифференциал этой независимой переменной. Этот частный дифференциал обозначается так: $d_x u$. Таким образом имеем $d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx$.

Совершенно также определяются частные дифференциалы от функции и по остальным независимым переменным

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}du \quad \text{и} \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Сумма всех частных дифференциалов функции u называется ее <u>полным дифференциалом</u> и обозначается du, так что

$$du = d_x u + d_y u + d_z u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Аналогично этому для функции от двух переменных независимых

$$u = f(x, y).$$

$$du = d_x u + d_y u = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Таким образом полный дифференциал есть сумма произведений каждой из частных производных на дифференциал соответствующей независимой переменной.

Пример:
$$u = 4x^2 + 5y^2 - 3z^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 10y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -6z;$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 8x dx + 10y dy - 6z dz.$$

Зная полный дифференциал можно найти частные производные. В самом деле пусть, например, полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ равняется

$$P dx + Q dy + R dz.$$

Мы тогда имеем равенство:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = P dx + Q dy + R dz.$$

Так как числа dx, dy, dz являются совершенно произвольными приращениями независимых переменных, то это равенство, очевидно, возможно только при условии

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=Q;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=R.$$

При вычислении полного дифференциала функции от нескольких переменных можно не вычислять частные производные от этой функции, а сразу пользоваться основными формулами дифференцирования.

Пример. $u=xy+yz+xz+\sin(x+y+z)$.

Имеем: $du=xdy+ydx+ydz+zdy+xdz+zdx+$
$+[\cos(x+y+z)](dx+dy+dz)=[y+z+\cos(x+y+z)]dx+$
$+[x+z+\cos(x+y+z)]dy+[x+y+\cos(x+y+z)]dz$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z+\cos(x+y+z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+z+\cos(x+y+z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+\cos(x+y+z).$$

Примеры для упражнения.

Найти полный дифференциал функций

1) $z=\dfrac{ay-bx}{by-ax}$; Ответ: $dz=\dfrac{(b^2-a^2)(xdy-ydx)}{(by-ax)^2}$.

2) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; Ответ: $dz=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

3) $z=x\sin y+y\sin x$; Ответ: $dz=(\sin y+y\cos x)dx+$
$+(x\cos y+\sin x)dy$.

4) $u=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; Ответ: $du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$.

5) $u=x+ye^{x/y}$ Ответ: $du=(1+e^{x/y})dx+e^{x/y}(1-\frac{x}{y})dy$

6) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ Ответ: $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

7) $u=\frac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}$ Ответ: $du=\frac{(1+x^2)dy-2x(1+y^2)\operatorname{arctg} y\,dx}{(1+x^2)^2(1+y^2)}$

8) $u=e^{x/y}+e^{z/y}$ Ответ: $du=\frac{e^{x/y}ydx-(xe^{x/y}+ze^{z/y})dy+ye^{z/y}dz}{y^2}$

9) Задачник кафедры математики № 55,56,57.

4. <u>Связь между полным дифференциалом функции и ее полным приращением.</u>

В § 10 мы видели, что для функции от одной переменной независимой, дифференциал является главной частью ее приращения, т.е. дифференциал функции и ее приращение являются величинами бесконечно малыми эквивалентными. Совершенно аналогичная зависимость существует и между полным приращением функции от нескольких переменных и ее полным дифференциалом. Эта зависимость выражается следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> Полный дифференциал функции от нескольких независимых переменных является главной частью ее полного приращения в том случае, когда приращения независимых переменных суть бесконечно малые, т.е. полный дифференциал и полное приращение функции суть величины бесконечно малые, эквивалентные при бесконечно малых приращениях независимых переменных.

Докажем эту теорему для функции от двух переменных независимых. Полное приращение функции $u=f(x,y)$.

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

можно представить в таком виде

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

Рассмотрим отдельно разность

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y).$$

Так как частная производная от функции $u = f(x, y)$ по x в точке $(x, y+\Delta y)$ т.е.

$$\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x}$$

равняется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x},$$

то

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x} + \varepsilon_1,$$

где ε_1 есть величина бесконечно малая при бесконечно малом Δx.

Считая, что частные производные от функции u непрерывны, будем иметь

$$\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_2,$$

где ε_2 опять-таки бесконечно малая величина при бесконечно малом Δy.

Отсюда:

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \alpha;$$

где $\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ есть величина бесконечно малая при бесконечно малых Δx и Δy и, наконец,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \alpha\Delta x \quad (2)$$

Совершенно также докажем, что

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\beta\Delta y, \qquad (3)$$

где β величина бесконечно малая при бесконечно малом Δy. Соединяя вместе равенства (I), (2) и (3) получим:

$$\Delta u=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\alpha\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\beta\Delta y,$$

а так как $\displaystyle\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y=$

$$=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=du,$$

то $\quad \Delta u=du+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$

Если будем считать Δx и Δy бесконечно малыми одного порядка малости, то du будет величиной бесконечно малой того же порядка малости, если только обе частные производные одновременно не равны нулю; каждая из величин $\alpha\Delta x$ и $\beta\Delta y$ а также их сумма будут величинами бесконечно малыми высшего порядка малости, чем Δx и Δy и, следовательно, чем du. Таким образом мы видим, что Δu отличается от du на величину $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$, которая является величиной бесконечно малой высшего порядка малости, чем du, и наша теорема доказана.

Эту теорему можно иначе сформулировать так. Полный дифференциал функции при бесконечно малых приращениях независимых переменных, приближенно с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости равен ее полному приращению, т.е.

$$\Delta u \approx du \quad или \quad \Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Это равенство является математическим выражением одного естественно научного принципа, так называемого принципа наложимости малых действий. Дело в том, что произведения $\frac{\partial f}{\partial x} dx$ и $\frac{\partial f}{\partial y} \partial y$ являются теми приращениями, которые получает функция u при изменении только одного x или одного y. Следовательно, наше равенство говорит, что полное приращение функции двух переменных при одновременных бесконечно малых изменениях независимых переменных приближенно равно сумме приращений этой функции, получаемых ею, когда каждое переменное меняется отдельно. Иначе говоря: соединенный эффект двух бесконечно малых действий с достаточной точностью представляется простой суммой эффектов, вызываемых каждым действием в отдельности. В этом и заключается сущность вышеупомянутого принципа.

Доказанная теорема позволяет во многих случаях заменять приращение функции ее полным дифференциалом, вычисление которого значительно проще, чем вычисление приращения. Особенно часто пользуются этой теоремой для оценки ошибки при приближенных вычислениях в прикладных науках. Пусть, например, надо вычислить значение функции $u = f(x, y, z)$ для некоторой системы значений аргументов x_0, y_0, z_0 причем нам известны только приближенные значения аргументов, а не их точные значения. Подставляя в выражение функции приближенные значения аргументов, мы,конечно, получим также и приближенное значение функции. Практически бывает чрезвычайно важно уметь вычислять ошибку (вернее, высшую границу ошибки) функции u в том случае, когда известны ошибки (границы ошибок) $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ или dx, dy, dz аргументов. Приращениям $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ соответствует приращение Δu, но вычисление Δu для очень многих функций представляет собой довольно сложную задачу и поэтому практически заменяют Δu через du, который гораздо легче вычислить. Точность, получаемая при этом, вполне достаточна для практических целей.

Пример I. Для вычисления об'ема цилиндра измеряют его высоту $h = 60$ см и диаметр основания $D = 50$ см. Границы ошибок, допущенных при измерении, $\Delta h = 0,1$ см и $\Delta D = 0,1$см. Какова граница ошибки, вычисленного по этим данным об'ема?

Приближенное значение об'ема получим по формуле:

$$v = \frac{\pi D^2 h}{4} \approx \frac{3.14 . 50^2 . 60}{4} =$$

$$= 117750 \text{ см}^3 = 117,75 \text{ дм}^3.$$

Для вычисления границы ошибки примем приближенно

$$\Delta v \approx dv, \text{ а}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial D} dD + \frac{\partial v}{\partial h} dh = \frac{2\pi Dh}{4} dD + \frac{\pi D^2}{4} dh.$$

Абсолютная величина последнего выражения

$$\left| \frac{2\pi Dh}{4} dD + \frac{\pi D^2}{4} dh \right| \leq \frac{2\pi Dh}{4} |\Delta D| + \frac{\pi D^2}{4} |\Delta h| ,$$

а поэтому граница ошибки равняется

$$\frac{2 . 3,14 . 50 . 60}{4} \cdot 0,1 + \frac{3,14 . 50^2}{4} 0,1 =$$

$$= 667,25 \text{ см}^3 \approx 700 \text{ см}^3 = 0,7 \text{ дм}^3.$$

Значит: $\Delta V < 0{,}7$ дм^3.

Примечание. Значение π мы также взяли неточное; конечно, и это также влияэт на точность результата. Но ошибка от неточности взятого нами значения π очень мала по сравнению с той ошибкой, которая получается от неточности D и h поэтому мы для простоты вычислений считали 3,14 точным значением числа π.

Пример 2. Для вычисления удельного веса тела его взвешивают и при этом получается вес $P = 326$ г, а затем измеряют его об'ем и при этом получается $V = 126$ см^3. Какова граница ошибки, вычисленного по этим данным удельного веса D если границы ошибок P и V суть

$$\Delta P = 0{,}5\,г. \quad ; \quad \Delta V = 1\,см^3 ?$$

Приближенное значение D получится по формуле

$$D = \frac{P}{V} = \frac{326}{126} \approx 2{,}59 \quad г/см^3.$$

Границу ошибки числа D получим по формуле

$$dD = \frac{\partial D}{\partial P}\, dP + \frac{\partial D}{\partial V} \cdot dV =$$

$$= \frac{dP}{V} - \frac{P\,dV}{V^2} = \frac{V\,dP - P\,dV}{V^2}$$

Абсолютная величина последней дроби

$$\left| \frac{V\,dP - P\,dV}{V^2} \right| \leqslant \frac{V|\Delta P| + P|\Delta V|}{V^2} .$$

Следовательно, граница ошибки равна

$$\frac{126 \cdot 0{,}5 + 326 \cdot 1}{126^2} \approx 0{,}024 \text{ и } \Delta D < 0{,}024 .$$

5. Производные и дифференциалы высших порядков функций от нескольких переменных независимых.

Пусть нам дана функция от двух переменных $u=f(x,y)$. Вычислим производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Каждая из этих производных является, вообще говоря, опять функцией от этих двух переменных независимых x и y, и поэтому от каждой из этих функций можно снова вычислять производные по x и y. Таким образом получаются производные второго порядка. Если возьмем производную по x от $\frac{\partial u}{\partial x}$, то получим вторую производную или производную второго порядка от функции u, взятую два раза по x, которая обозначается так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Взяв же производную от $\frac{\partial u}{\partial x}$ по y, получим производную второго порядка от функции u, взятую сначала по x, а потом по y, которую мы условимся обозначать так: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Взяв, наконец, производные от $\frac{\partial u}{\partial y}$ по x и по y, получим производные второго порядка от функции u, вычисленные сначала по y, а затем по x, и два раза по y.

Эти последние производные второго порядка обозначают так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Совершенно также строится понятие о производных третьего порядка. Например, производная от $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ по x называется производной третьего порядка от функции u, взятой три раза по x, и обозначается через

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Производной третьего порядка от функции u, взятой два раза по y и один раз по x, называется производная по x от $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Эта производная обозначается так:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \quad \text{и т.д.}$$

<u>Примеры.</u> $u = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 + 18xy - 8y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 9x^2 - 16xy + 15y^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 9x^2 - 16xy + 15y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8x^2 + 30xy - 12y^2;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 24x + 18y; \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 18x - 16y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = 18x - 16y; \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = 18x - 16y; \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y} = -16x + 30y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 30x - 24y; \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = -16x + 30y.$$

Сравнивая полученные результаты, мы видим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}.$$

Это совпадение не случайное.

Можно доказать такую теорему: Если частная производная непрерывна, то ее значение не зависит от порядка дифференцирования. На доказательстве этой теоремы не будем останавливаться, а ограничимся той проверкой на примере, которую мы сделали выше.

Переходим к определению дифференциалов высших порядков. Мы видели, что полным дифференциалом от функции $u = f(x, y)$ называется выражение

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Условимся называть этот дифференциал дифференциалом первого порядка от функции u. Дифференциал от дифференциала первого порядка называется дифференциалом второго порядка и обозначается через d^2u; таким образом

$$d^2 u = d(du).$$

Точно также дифференциалом третьего порядка называется дифференциал от дифференциала второго порядка, т.е.

$$d^3 u = d(d^2 u) \quad \text{и т.д.}$$

Выведем выражение для дифференциала второго порядка функции от двух независимых переменных $u = f(x, y)$:

$$d^2 u = d(du) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \partial y\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right).$$

Числа dx и dy суть произвольные приращения независимых переменных и как таковые не зависят от тех значений, которые при этом имеют сами независимые переменные x и y. Поэтому при вычислении производных и дифференциалов, их следует считать постоянными и выносить за знак производной и дифференциала, следовательно:

$$d^2u = dx \cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + dy \cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются также функциями от x и от y, то

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy.$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy.$$

Отсюда

$$d^2u = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2;$$

а так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},$$

то

$$d^2u=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 \qquad (4)$$

Совершенно также выводится выражение для дифференциала третьего порядка функции от двух переменных независимых. Предлагаем читателю самому проделать все выкладки, а здесь напишем только результат

$$d^3u=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\,dx^2dy+$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,dy^3 \qquad (5)$$

Выражения для дифференциалов второго и третьего порядка очень напоминают по своему внешнему виду выражения для квадрата и куба суммы двух количеств. Это обстоятельство можно использовать для того, чтобы легче запомнить эти формулы. Выражения для дифференциалов второго и третьего порядка можно представить в более сжатой символической форме. Условимся над символами $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ производить все действия по тем же правилам, как над обыкновенными числами, считая ∂x и ∂y нераздельными, а затем, после выполнения указанных действий, заменять произведение

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial^m}{\partial y^m}\cdot u$$

на частную производную

$$\frac{\partial^{k+m} u}{\partial x^k\,\partial y^m}.$$

Например $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}u$ будем заменять на частную производную $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ $\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}u$ будем заменять на частную производную $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}$ и т.д.

Тогда наши выражения для d^2u и d^3u можно будет символически записать так:

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u$$

$$d^3u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 u.$$

Если эти формулы написать в развернутом виде, принимая во внимание вышеизложенные замечания, получим выражения для du и d^2u найденные выше-формулы(4) и (5).

Можно доказать, что дифференциал любого порядка функции от двух переменных независимых выражается символически так:

$$d^nu=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u$$

На выводе этой формулы не будем останавливаться

<u>Пример:</u> $z=e^{x-y^2}+\cos x;$

Найти d^2z.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-y^2}-\sin x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y\,e^{x-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x-y^2}-\cos x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-2y\,e^{x-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2e^{x-y^2}+4y^2e^{x-y^2}$$

Подставляя в формулу (4), находим:

$$d^2z=(e^{x-y^2}-\cos x)\,dx^2+2(-2ye^{x-y^2})\,dx\,dy+$$
$$+(-2e^{x-y^2}+4y^2e^{x-y^2})\,dy=$$
$$=(e^{x-y^2}-\cos x)\,dx^2-4ye^{x-y^2}dx\,dy+2e^{x-y^2}(2y^2-1)\,dy^2$$

Можно дифференциал второго порядка вычислять также не по формуле, а непосредственно, опираясь на основные формулы. Пусть, например $u=y\ln x$ и требуется вычислить d^2u.

Найдем сначала du

$$du=y\cdot d\ln x+\ln x\cdot dy=\frac{y\,dx}{x}+\ln x\,dy$$

Для вычисления d^2u дифференцируем прямо du.

Так как dx и dy не зависят от x и y, то они при дифференцировании считаются постоянными и выносятся за знак дифференциала

$$d^2u=dx\cdot d\frac{y}{x}+dy\cdot d\ln x=$$
$$=dx\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}+dy\cdot\frac{dx}{x}=$$
$$=\frac{x\,dx\,dy-y\,dx^2}{x^2}+\frac{dx\,dy}{x}=$$
$$=\frac{x\,dx\,dy}{x^2}-\frac{y\,dx^2}{x^2}+\frac{dx\,dy}{x}=\frac{2\,dx\,dy}{x}-\frac{y\,dx^2}{x^2}$$

Зная дифференциал второго порядка, можно найти частные производные второго порядка, так как, очевидно, $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ будет равно коэффициенту при dx^2, $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}$ будет равно половине коэффициента при $dx\,dy$ и, наконец, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$ будет равно коэффициенту при dy^2 потому, что из равенства

$$P dx^2 + Q dx\, dy + R dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

в силу произвольности чисел dx и dy следует

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = P; \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = Q; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = R.$$

Применяя, например, это замечание к предыдущему примеру $u = y \ln x$, найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Примеры для упражнения.

Найти частные производные и полный дифференциал 2-го порядка функций

1) $z = xy$ Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$d^2 z = 2dx\, dy.$

2) $z = e^{ax+by}$ Ответ: $d^2 z = e^{ax+by}(a dx + b dy)^2.$

3) $u = \ln(x^2 + y^2).$

$$d^2 u = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} dx^2 - 4\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx\, dy + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy^2.$$

4) $v = e^{xy}$ Ответ: $d^2 v = e^{xy} y^2 dx +$

$$+ 2e^{xy}(xy+1)\, dx\, dy + x^2 e^{xy} dy^2.$$

5) $u = \sin(xyz)$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$

Отв: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \cos(xyz) - 3xyz \sin(xyz) -$

$- x^2y^2z^2 \cos(xyz)$.

§ 43. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ.

I. Дифференцирование сложной функции от одной независимой переменной.

Пусть нам дана функция

$z = f(u, v)$, а u и v пусть будут сами функции от некоторой независимой переменной x.

$$u = \varphi(x). \quad v = \psi(x).$$

Тогда и z, конечно, является функцией от x. Такая функция называется функцией от сложных аргументов.

Поставим себе задачу вычислить производную от z по x.

Когда x получит приращение Δx, то u получит приращение Δu, v - получит приращение Δv, а z получит приращение Δz. Если все функции f, φ и ψ будут непрерывными, то $\Delta z, \Delta u, \Delta v$ будут бесконечно малыми при бесконечно малом Δx. Приращение Δz, очевидно, равно

$$\Delta z = f(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - f(u, v).$$

Эту разность можно преобразовать так же, как мы преобразовали такую же разность на стр. 114. Тогда получим:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v,$$

где α и β суть числа бесконечно малые при бесконечно малом Δx.

Разделив левую и правую часть на Δx, получим:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}+\beta\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Перейдя к пределу при Δx, стремящемся к нулю, и приняв во внимание, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{dz}{dx};\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx};\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{dv}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0;\quad \lim_{\Delta x\to 0}\beta=0.$$

получим:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Эта производная называется полной производной от функции z по x.

Совершенно также можно показать, что в том случае, когда z зависит от трех переменных, т.е.

$$z=f(u,v,w)$$

и каждое из этих переменных является функцией от x: $u=\varphi(x)$; $v=\psi(x)$; $w=\omega(x)$, то производная от z по x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

Словами мы можем так сформулировать правило вычисления производной от сложной функции: для того, чтобы вычислить производную от функции z сложных аргументов u, v, w, надо составить частные производные от z по u, v и w, умножить каждую из них на производную соответствующей функции по x и сложить полученные произведения. Следует отметить очень важный частный случай, когда x входит явно в функцию или, когда $z=f(x,u,v)$, где x есть переменная независимая, а u и v являются функциями от x, т.е.

$$u=\varphi(x)$$
$$v=\psi(x).$$

В этом случае можно вычислять $\frac{dz}{dx}$ по той же формуле, только в ней надо положить $u=x;\ v=u;\ w=v;$ и, следовательно, вместо $\frac{du}{dx}$ надо будет подставить $\frac{dx}{dx}$, т.е. I.

Окончательно получим в этом случае:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}\ .$$

Здесь мы встречаемся с двумя производными от z по x. В правой части мы имеем частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$, которая вычисляется в предположении, что u и v являются постоянными или так называемую производную по x, входящему явно. В левой части мы имеем полную производную $\frac{dz}{dx}$, которая вычисляется в предположения, что u и v заменены соответствующими функциями от x. Эти две производные, конечно, имеют различный смысл. Этим об'ясняется различие в их обозначениях.

<u>Пример I:</u> $z=\sin(2u+3v+4w)$

$$u=x^2;\quad v=x^3;\quad w=x^5.$$

Найти $\frac{dz}{dx}$.

В этом случае

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2\cos(2u+3v+4w).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=3\cos(2u+3v+4w).$$

$$\frac{\partial z}{\partial w}=4\cos(2u+3v+4w).$$

$$\frac{du}{dx}=2x;\ \frac{dv}{dx}=3x^2;\quad \frac{dw}{dx}=5x^4.$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}=$$

$$=2.2x\cos(2u+3v+4w)+3.3x^2\cos(2u+3v+4w)+$$

$$+4.5x^4\cos(2u+3v+4w)=$$

$$=(4x+2x^2+2ax^4)\cos(2x^2+3x^3+4x^5).$$

<u>Пример 2.</u> $u=\sin\frac{x}{y};\ x=e^t;\ y=t^2.$

Найти $\frac{du}{dt}$.

Имеем: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$

$$\frac{dx}{dt}=e^t;\ \frac{dy}{dt}=2t;\ \frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=$$

$$=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}.\ e^t-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}.\ 2t=$$

$$=\frac{e^t}{t^2}\cos\frac{e^t}{t^2}-\frac{e^t.\ 2t}{t^4}\cos\frac{e^t}{t^2}=$$

$$=(t-2)\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}.$$

<u>**Пример 3.**</u> $u = e^{ax}(y - z)$;

$y = a \sin x$; $z = \cos x$.

Имеем: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = a e^{ax}(y - z)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}$.

$$\frac{dy}{dx} = a \cos x; \quad \frac{dz}{dx} = -\sin x.$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} =$$

$$= a e^{ax}(y - z) + a e^{ax} \cos x + e^{ax} \sin x =$$

$$= e^{ax}(a^2 + 1) \sin x.$$

Чтобы вычислить полный дифференциал функции $z = f(u, v, w)$ в том случае, когда u, v и w являются функциями от x, надо выражение для $\dfrac{dz}{dx}$ умножить на dx. Тогда получим

$$dz = \frac{dz}{dx} dx = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}\right) dx =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} dx + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} dx + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} dx;$$

а так как $\dfrac{du}{dx} dx = du$; $\dfrac{dv}{dx} dx = dv$;

$$\frac{dw}{dx} dx = dw,$$

то окончательно имеем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw.$$

Это выражение для полного дифференциала ничем по внешнему виду не отличается от выражения для полного дифференциала, найденного нами в $\S 42$. Следовательно, мы можем теперь утверждать, что выражение для полного дифференциала функции от нескольких переменных имеет один и тот же вид независимо от того, являются ли эти переменные независимыми переменными или функциями от какой-нибудь другой независимой переменной.

Примеры для упражнений.

1) Найти $\frac{dz}{dx}$ если $z=f(u,v)$. $u=ax^2+bx+c$; $v=ax+b$.

Ответ: $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}(2ax+b)+\frac{\partial z}{\partial v}a$

2) Найти dz, если $z=f(u,v)$ и $u=\sqrt{x}$; $v=\ln x$

Ответ: $dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{x}\right)dx.$

3) Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=f(x,u,v)$ и $u=\frac{1}{x}$; $v=\ln x$

Ответ: $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{x}$

4) Найти dz, если $z=f(u,v,w)$, и $u=\cos x$; $v=\sin x$; $w=\operatorname{tg} x$.

Ответ: $dz=\left(-\frac{\partial z}{\partial u}\sin x+\frac{\partial z}{\partial v}\cos x+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

5) Найти $\frac{du}{dx}$, если $u=z^2+y^3+zy$; $z=\sin x$; $y=e^x$.

Ответ: $\frac{du}{dx}=3e^{3x}+e^x(\sin x+\cos x)+\sin 2x.$

6) Найти $\frac{du}{dx}$, если $u=v^2+vy$; $v=\ln x$; $y=e^x$.

Ответ: $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2v+y}{x}+ve^{x}.$

7) Найти $\dfrac{du}{d\theta}$ если $u=\ln(a^2-\rho^2)$; $\rho=a\sin\theta.$

Ответ: $\dfrac{du}{d\theta}=-2\,tg\,\theta.$

2. Дифференцирование сложной функции от нескольких независимых переменных.

Рассмотрим теперь случай более сложного строения функции. Пусть z есть функция от двух переменных $z=f(u,v)$, но каждая из этих переменных в свою очередь является функцией от двух переменных независимых

$$u=\varphi(x,y)$$

$$v=\psi(x,y).$$

Тогда z также будет, конечно, функцией от этих двух независимых переменных. Требуется вычислить частные производные от функции z по x и y. Так как при вычислении частной производной по x, переменная y считается постоянной, то для вычисления этой производной можно применить формулу на стр.127; придется только слегка видоизменить обозначения, заменив $\dfrac{du}{dx}$ через $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{dv}{dx}$ через $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Применяя эту формулу получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Точно также получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Здесь опять следует обратить внимание на тот частный случай, когда функция z зависит от x и y также явным образом, т.е. когда

$$z=f(x, y, u, v),$$

а u и v являются функциями от x и y.

В этом случае можно также воспользоваться прежним правилом, но здесь мы при записи формулы встретимся со следующим затруднением. Слева и справа будут у нас стоять символы $\frac{\partial z}{\partial x}$, но эти символы будут иметь различный смысл. Справа мы будем иметь производную от z по x, вычисленную в предположении, что u и v являются постоянными числами, а слева будет производная от z по x, вычисленная в предположении, что u и v также являются функциями от x. Чтобы избежать путаницы, получающейся от обозначения различных величин одним и тем же символом, условимся первую из этих производных обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x}$, а вторую через $\frac{\partial z}{\partial x}$. Для однообразия записи будем также писать $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$ вместо $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Принимая во внимание все эти замечания, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Выведем теперь выражения для полного дифференциала функции $z=f(u, v)$ в том случае, когда u и v являются функциями от двух переменных независимых x и y.

Мы имеем
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Подставив сюда выражения для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, полученные нами выше, найдем

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Вынесем теперь за скобки в первом и третьем члене $\frac{\partial z}{\partial u}$, во втором и четвертом $\frac{\partial z}{\partial v}$; тогда получим:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

Но $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=dv.$$

Следовательно, $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv.$

Мы видим, что и в этом случае выражение для первого дифференциала имеет такой же внешний вид, как в том случае, когда u и v являются независимыми переменными.

Из всего сказанного нами о дифференциале первого порядка следует теорема.

Выражение для дифференциала первого порядка функции от нескольких переменных имеет один и тот же вид, как в том случае, когда эти переменные независимые, так и в том случае когда эти переменные сами в свою очередь являются функциями от одной или нескольких независимых переменных.

Пример I. Доказать, что если

$$z = y\varphi(x^2 - y^2),$$

то

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

Положим $x^2 - y^2 = u$, тогда

$$z = y\varphi(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(u)\cdot 2x = 2xy\,\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = y\varphi'(u)(-2y) + \varphi(u) = -2y^2\varphi'(u) + \varphi(u),$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\,\varphi'(u) - 2y\,\varphi'(u) + \frac{\varphi(u)}{y} =$$

$$= \frac{\varphi(u)}{y} = \frac{y\varphi(u)}{y^2} = \frac{y\varphi(x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Пример 2. Доказать, что если

$$z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ то } x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Положим $\frac{y}{x} = u$, тогда

$$z = xy + x\varphi(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi(u) + x\varphi'(u)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\varphi'(u).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\varphi'(u)\cdot\frac{1}{x} = x + \varphi'(u).$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + x\varphi(u) - y\,\varphi'(u) + xy + y\,\varphi'(u) =$$

$$= 2xy + x\varphi(u) = xy + z.$$

Примеры для упражнений.

Найти частные производные и полные дифференциалы функций:

1) $z=f(u,v)$, где $u=x+y$; $v=x-y$.

Ответ: $dz=\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)dy$

2) $w=f(u,v,w)$, где $u=x^2+y^2$; $v=xy$; $w=x+y$.

Ответ: $dw=\left(2x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\right)dx+$

$$+\left(2y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\right)dy.$$

3) Доказать, что если

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\varphi(x-y),$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y.$$

4) Доказать, что если

$$z=x+y+\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

то

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x+y.$$

3. Производные и дифференциалы высших порядков сложной функции от одной или нескольких независимых переменных.

Пусть нам дана функция $z=f(u,v)$, где u и v являются некоторыми функциями от x

$$u=\varphi(x)$$
$$v=\psi(x).$$

Мы знаем, что производная первого порядка от z по x вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Выведем теперь выражение для производной второго порядка от той же функции z по x.

Имеем

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Пользуясь теоремами о производной суммы и произведения, получим

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)+$$

$$+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right). \qquad (1)$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ являются также функциями от u и v, то

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{dv}{dx}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{du}{dx}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{dv}{dx}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\;\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\;\frac{dv}{dx}.$$

Кроме того, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)=\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)=\frac{d^2v}{dx^2}$$

так как u и v непосредственно зависят от x и не являются сложными функциями. Подставляя вс: это в равенство (I) получим:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{dx}+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,\frac{dv}{dx}\right)\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}$$

Раскрыв скобки и сделав приведение подобных членов, получим:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{dx^2} \qquad (2)$$

Аналогичным путем можно получить и выражение для производной третьего порядка, но выкладки при этом будут, конечно, сложнее.

Для того, чтобы получить дифференциал второго порядка d^2z дифференцируем дифференциал первого порядка dz.

Мы имеем:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\,du+\frac{\partial z}{\partial v}\,dv.$$

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial u}\,du+\frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right)=$$

$$=d\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du\right)+d\left(\frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right).$$

Но
$$d\left(\frac{\partial z}{\partial u}\,du\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)du+\frac{\partial z}{\partial u}\,d^2u$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv+\frac{\partial z}{\partial v}\,d^2v\,.$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ являются функциями от u и v, которые в свою очередь зависят от x, то

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,du+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,dv\,;$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\,du+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,dv$$

Отсюда имеем

$$d^2z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,du+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,dv\right)du+\frac{\partial z}{\partial u}\,d^2u+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,du+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,dv\right)dv+\frac{\partial z}{\partial v}\,d^2v=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,dv^2+\frac{\partial z}{\partial u}\,d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}\,d^2v=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u}\,du+\frac{\partial}{\partial v}\,dv\right)^2 z+\frac{\partial z}{\partial u}\,d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}\,d^2v.$$

Сравнивая полученное выражение для дифференциала второго порядка сложной функции с выражением для дифференциала второго порядка функции от двух независимых переменных $z=f(x,\,y)$.

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z$$

мы видим, что в отличие от дифференциала первого порядка, дифференциал второго порядка имеет уже различный вид для сложной и для простой функции. В случае сложной функции появляются добавочные члены:

$$\frac{\partial z}{\partial u} d^2u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2v .$$

Отсюда следует, что в то время как при вычислении дифференциала первого порядка совершенно безразлично, будут ли аргументы независимыми переменными или функциями, при вычислении дифференциалов высших порядков, наоборот, надо строго различать независимые переменные от функций, так как если вместо независимых переменных стоят функции, то существенным образом меняются результаты. Формула для дифференциала второго порядка от простой функции является частным случаем формулы для дифференциала второго порядка от сложной функции, так как если u и v являются переменными независимыми, то du и dv надо рассматривать как постоянные.

Поэтому $d^2u = 0$ и $d^2v = 0$ и мы получим в этом случае по прежнему:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv\right)^2 z .$$

Отметим один частный случай, когда дифференциал второго порядка от сложной функции по внешнему виду ничем не отличается от дифференциала второго порядка простой функции. Это будет в том случае, когда u и v являются линейными функциями от x, т.е.

$$u = ax + b ,$$
$$v = cx + d ,$$

где a, b, c и d суть постоянные числа.

В этом случае $du = adx; \quad dv = cdx.$

Поэтому du **и** dv **здесь считаются постоянными и**

$$d^2u = 0; \; d^2v = 0 .$$

Последние два члена в выражении для d^2z **пропадают, и мы получаем:**

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2 z.$$

Рассмотрим теперь опять более общий случай строения функции. Пусть z есть функция от двух переменных:

$$z = f(u, v),$$

а каждое из этих переменных есть функция уже от двух переменных независимых:

$$u = \varphi(x, y)$$
$$v = \psi(x, y).$$

Вычислим частные производные от z по x и y второго порядка.

Так как при дифференцировании по x y считается постоянным, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ можно вычислить по формуле (2). Только вместе $\frac{du}{dx}$ надо подставить $\frac{\partial u}{\partial x}$ и вместо $\frac{dv}{dx}$ надо подставить $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Вместо $\frac{d^2u}{dx^2}$ надо подставить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и, наконец, вместо $\frac{d^2v}{dx^2}$ надо подставить $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

Окончательно получаем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Аналогичным путем найдем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Для того, чтобы вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, надо взять производную по y от $\frac{\partial z}{\partial x}$, а так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\text{ то}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.$$

Все эти формулы, конечно, запоминать не стоит. При решении задач надо пользоваться тем методом, при помощи которого выведены эти формулы.

Пример I. $z=f(u,v)$.

$$u=x^2+y^2;\quad v=xy.$$

Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y=2x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Чтобы найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ дифференцируем снова $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ по x.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{\partial f}{\partial u}+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$

$$+y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$=2\frac{\partial f}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2x+2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}y+$$

$$+y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}2x+y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot y=$$

$$=2\frac{\partial f}{\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Пример 2. Доказать, что если

$$z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax),\ \text{то}$$

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

Положим $\quad y+ax=u;\quad y-ax=v,$

тогда $\quad z = \varphi(u) + \psi(v).$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\varphi'(u) - a\psi'(v).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(u) + \psi'(v).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\varphi''(u) + a^2\psi''(v).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi''(u) + \psi''(v).$$

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\varphi''(u) + a^2\psi''(v) -$$

$$- a^2\varphi''(u) - a^2\psi''(v) = 0.$$

Примеры для упражнений.

Найти частные производные второго порядка от функций:

$$z = \varphi(u,\ v),$$

если $\quad u = x + y; \quad v = x - y.$

Ответ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}.$$

2) $z = \varphi(u, v); \quad u = x^2 + y^2.$

$\qquad v = xy.$

Ответ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ вычислено в тексте:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} +$$

$$+ xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial u}.$$

3) Доказать, что если

$$z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y) \text{ , то}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§ 44. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

I. Пусть функция y и независимая переменная x связаны уравнением:

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

не решенным относительно y ; в этом случае говорят, что y есть неявная функция от x или, что функция y от x задана неявно.

Решив это уравнение относительно y , мы получим ту же самую функцию, заданную явно. Но не всегда решение уравнения удобно и возможно.

Поэтому бывает иногда необходимо уметь вычислять производную от y по x , не решая уравнение относительно y . Покажем сейчас, как решается эта задача. Пусть при решении уравнения (I) относительно y получается

$$y = \varphi(x).$$

Равенство (I) будет тождеством, если под y подразумевать функцию $\varphi(x)$; и поэтому можно это равенство продифференцировать, т.е. приравнять друг другу производные от левой и правой части этого равенства. В левой части стоит сложная функция от x, так как од y надо подразумевать функцию от x. Дифференцируя левую часть по правилу дифференцирования сложной функции, найдем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y',$$

а так как производная от правой части равны нулю, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Отсюда:

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}$$

являются, вообще говоря, функциями от x и y и поэтому производная $\frac{dy}{dx}$ также выражается не только через x, как обычно, но также и через y.

<u>Примечание</u>: $\frac{\partial f}{\partial y}$, конечно, не может равняться нулю, так как в противном случае функция $f(x,y)$ была бы только функцией от одного x.

Для вычисления y'' можно дифференцировать по x равенство:

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}};$$

или же равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

В последнем случае получим:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)y'+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0 \qquad (2).$$

Но
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,y'$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,y'.$$

Подставляя все это в уравнение (2), получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0.$$

Или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0.$$

Из этого уравнения можно найти y''.

Практически при решении задач лучше не пользоваться готовыми формулами, а применять тот метод, которым были выведены эти формулы.

Покажем на примерах пользование этим методом.

Пример I. Функция y от x задана неявно уравнением $x^3+y^3-3axy=0$, где a число постоянное.

Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Дифференцируем данное уравнение по x, имея в виду, что y есть функция от x;

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0 \qquad (3)$$

$$3x^2-3ay+(3y^2-3ax)y'=0$$

Отсюда
$$y'=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}.$$

Для вычисления y'' дифференцируем равенство (3) по x :

$$6x+6yy'^2+3y^2y''-3ay'-$$
$$-3ay'-3axy''=0.$$

Подставим сюда теперь вместо y' его выражение, тогда получим:

$$6x+6y\frac{(x^2-ay)^2}{(ax-y^2)^2}+3y^2y''-6a\frac{x^2-ay}{ax-y^2}-3axy''=0.$$

Откуда:

$$y''=\frac{6x+\frac{6y(x^2-ay)^2}{(ax-y^2)^2}-\frac{6a(x^2-ay)}{ax-y^2}}{3(ax-y^2)}=$$

$$=\frac{2x(ax-y^2)^2+2y(x^2-ay)^2-2a(x^2-ay)(ax-y^2)}{(ax-y^2)^3}.$$

Числитель этой дроби можно преобразовать еще так:

$$2x(ax-y^2)^2+2y(x^2-ay)^2-2a(x^2-ay)(ax-y^2)=$$

$$=2a^2x^3-4ax^2y^2+2xy^4+2x^4y+4ax^2y^2+2a^2y^3-$$

$$-2a^2x^3+2a^3xy+2ax^2y^2-2a^2y^3=$$

$$=2xy^4+2x^4y-6ax^2y^2+2a^3xy=$$

$$=2xy(y^3+x^3-3axy)+2a^3xy=2a^3xy,$$

так как $y^3+x^3-3axy=0$ по условию.

Окончательно имеем:

$$y''=\frac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}.$$

Пример 2. Дано уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Написать уравнение касательной к этому эллипсу в точке (x_0, y_0), лежащей на эллипсе.

Угловой коэффициент касательной в данной точке равен значению производной в этой точке; поэтому для решения задачи необходимо найти y'.

Дифференцируем данное уравнение по x,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0.$$

Откуда

$$y'=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

В данной точке значение производной равено $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, а следовательно уравнение касательной (см. §22) будет:

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

$$\frac{yy_0'}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}.$$

В силу того, что точка с координатами x_0, y_0 лежит на эллипсе:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

и уравнение касательной будет:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Пример 3. Дано уравнение кривой

$$x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0.$$

Найти, в какую сторону направлена вогнутость этой кривой в точке (I,I).

О направлении вогнутости кривой можно судить по знаку второй производной в данной точке (см. § 19).

Следовательно, надо вычислить эту производную.

Вычислим сначала первую производную.

Дифференцируем данное уравнение по x

$$2x+2y+2xy'+2yy'-4+2y'=0.$$

$$x+y-2+(x+y+1)y'=0. \qquad (4)$$

Подставляя вместо x и y их значения в данной точке, т.е. $x=1$; $y=1$; получим $3y'=0$ и $y'=0$.

Дифференцируем теперь опять равенство (4) по x :

$$1+y'+(1+y')y'+(x+y+1)y''=0.$$

$$1+2y'+y'^2+(x+y+1)y''=0. \qquad (5)$$

Подставляя значение $x=1$; $y=1$; $y'=0$.

Найдем $1+3y''=0$ или $y''=-\frac{1}{3}$.

Так как $y''<0$, то в данной точке кривая обращена своей вогнутостью в сторону отрицательных ординат.

Пример 4. Функция y от x задана неявно уравнением:

$$x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0.$$

Вычислить y''' при $x=1$; $y=1$.

Дифференцируем по x равенство (5) (см. предыдущий пример)

$$2y''+2y'y''+(1+y')y''+(x+y+1)y'''=0.$$

В предыдущем примере мы видели, что в данной точке

$$y'=0 \text{ и } y''=-\frac{1}{3}$$

Подставляя это в полученное уравнение и подставляя также $x=1$; $y=1$, получим:

$$-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+3y'''=0 \quad \text{или} \quad y'''=\frac{1}{3}.$$

Примеры для упражнений

1) Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Найти y' и y'' и написать уравнение касательной в точке x_0, y_0.

Ответ: $y'=\frac{b^2x}{a^2y}$; $y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$,

уравнение касательной $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

2) Написать уравнение касательной и нормали к кривой $x^2-2xy+3y^2-2y-16=0$ в точке (1; 3).

Ответ: $2x-7y+9=0$; $7x+2y-13=0$.

3) $y\sin x-\cos(x-y)=0$. Найти y'.

Ответ: $y'=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

4) $x=y-\alpha\sin y$. Найти y' и y''.

Ответ: $y'=\frac{1}{1-\alpha\cos y}$; $y''=-\frac{\alpha\sin y}{(1-\alpha\cos y)^3}$.

5) Функция y задана уравнением

$$x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0.$$

Найти y', y'', y''' при $x=\frac{1}{2}$ и $y=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $y'=0$; $y''=1$; $y'''=-2$.

2. Рассмотрим теперь более сложный случай. Даны два уравнения с тремя переменными:

$$\begin{cases} f(x, y, z)=0 \\ f_1(x, y, z=0. \end{cases}$$

Эту систему уравнений можно решить относительно двух из этих переменных, например, относительно y и z.

Выполнив это, мы получим выражения для y и z через x ; следовательно, мы можем считать, что при помощи этих двух уравнений нам заданы y и z , как неявные функции от x. Покажем, как можно вычислить производные от y и z по x, не решая системы.

Продифференцируем оба равенства по x по правилам дифференцирования сложных функций:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0. \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Решая эти два уравнения относительно y' и z' , мы найдем искомые производные. Чтобы найти производные второго порядка y'' и z'' , надо дифференцировать равенства (6) по x, подставить в полученные уравнения вместо y' и z' , найденные для них раньше выражения и затем решить полученную систему относительно y'' и z'.

Раз'ясним все это подробнее на примерах.

Пример I. Даны два уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6$$
$$x - y + 2z = 3 .$$

Найти y', z', y'', z'' при $x=2$; $y=1$ и $z=1$.

Дифференцируем данные равенства по x

$$2x + 2yy' + 2zz' = 0.$$
$$1 - y' + 2z' = 0.$$

или после сокращения:

$$x + yy' + zz' = 0$$
$$1 - y' + 2z' = 0 \qquad (7)$$

Подставим в эти уравнения данные нам значения x, y, z:

$$2 + y' + z' = 0$$
$$1 - y' + 2z' = 0.$$

Решая эту систему уравнений относительно y' и z', найдем

$$y' = -1; \quad z' = -1.$$

Для вычисления производных второго порядка, диффе-ренцируем равенства (7)

$$1 + y'^2 + yy'' + z'^2 + zz'' = 0$$
$$-y'' + 2z'' = 0.$$

Подставив сюда найденные значения y' и z', а также данные значения y и z, получим:

$$1 - 1 + y'' - 1 + z'' = 0$$
$$-y'' + 2z'' = 0,$$

или

$$y'' + z'' = 1$$
$$-y'' + 2z'' = 0$$

Откуда $z'' = \dfrac{1}{3}$; $y'' = \dfrac{2}{3}$.

Пример 2. Функции y и z от x заданы системой урав-нений

$$2x^2 + y^2 - 3z^2 = 5$$
$$x + 2y - z = 6.$$

Найти dy, dz, d^2y, d^2z при $x = 2$; $y = 3$; $z = 2$.

Возьмем полные дифференциалы от левых и правых ча-стей наших равенств:

$$4x dx + 2y dy - 6z dz = 0$$
$$dx + 2dy - dz = 0.$$

или
$$2xdx + ydy - 3zdz = 0.$$
$$dx + 2dy - dz = 0 \qquad (8)$$

Подставляя данные нам значения x, y и z, получим:
$$4dx + 3dy - 6dz = 0$$
$$dx + 2dy - dz = 0.$$

Из второго уравнения имеем:
$$dz = dx + 2dy.$$

Подставляя в первое уравнение получим:
$$4dx + 3dy - 6dx - 12dy = 0;$$

или
$$2dx + 9dy = 0,$$

откуда
$$dy = -\frac{2}{9}dx,$$
$$dz = dx + 2dy = dx - \frac{4}{9}dx = \frac{5}{9}dx.$$

Для вычисления дифференциалов второго порядка возьмем полные дифференциалы от левых и правых частей равенств (8)
$$2dx^2 + dy^2 + yd^2y - 3dz^2 - 3zd^2z = 0$$
$$2d^2y - d^2z = 0.$$

Подставляя вместо y и z данные их значения, а вместо dy и dz, полученные выше выражения, будем иметь:
$$2dx^2 + \frac{4}{81}dx^2 + 3d^2y - \frac{75}{81}dx^2 - 6d^2z = 0.$$
$$2d^2y - d^2z = 0.$$

или
$$3d^2y - 6d^2z = -\frac{91}{81}dx^2;$$
$$2d^2y - d^2z = 0.$$

Из второго уравнения имеем:
$$d^2z = 2d^2y.$$

Подставляя в первое уравнение, получим:

$$-9d^2y = -\frac{91}{81}dx^2; \quad d^2y = \frac{91}{729}dx^2;$$

$$d^2z = 2d^2y = \frac{182}{729}dx^2.$$

3. Рассмотрим теперь, наконец, случай одного уравнения с тремя переменными $f(x, y, z) = 0$.

Такое уравнение можно решить относительно одного переменного и, следовательно, можно считать, что этим уравнением задается только одна функция от двух переменных независимых. Пусть например x и y будут независимыми переменными, тогда z будет неявной функцией от x и y. Найдем частные производные от этой функции, т.е. $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Продифференцируем данное нам уравнение сначала по x, а затем по y.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Из этих двух уравнений сразу находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Чтобы найти производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

придется продифференцировать равенства (9).

Не будем разбирать подробно эту задачу в общем виде, а рассмотрим конкретный пример.

Пример. Функция от двух переменных x и y задана неявно уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Найти частные производные от z.

Дифференцируем данное равенство по x и по y

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad (10)$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (11)$$

Отсюда
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Дифференцируем теперь равенства (10) и (11), предварительно сократив их на 2. Дифференцируя равенства (10) по x, получаем:

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

Подставляя вместо $\frac{\partial z}{\partial x}$, найденное выше выражение, получим:

$$1+\frac{x^2}{z^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

или
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3},$$

а так как $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x^2+z^2=a^2-y^2$,

то
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{a^2-y^2}{z^3}=\frac{y^2-a^2}{z^3}.$$

Дифференцируя равенство (11) по y, найдем

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Подставив вместо $\frac{\partial z}{\partial y}$ его выражение и решив это уравнение относительно $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, найдем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3} = -\frac{a^2 - x^2}{z^3} = \frac{x^2 - a^2}{z^3}.$$

Наконец, дифференцируя равенство (10) по y, найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$\frac{xy}{z^2} + z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}.$$

Примеры для упражнений.

1) y и z заданы неявно системой уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3,$$
$$y^2 - 2x + 2 = 1.$$

Найти значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$

при $x = 1;\quad y = 1;\quad z = 1.$

Ответ: $\frac{dy}{dx} = 1;\quad \frac{dz}{dx} = 0.$

2) Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$, если y и z определяются системой уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x + y + z = 1.$$

Ответ: $\frac{dy}{dx} = \frac{x - z}{z - y};\quad \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{z - y}.$

3) Функции x и y от z заданы неявно системой уравнений:

$$-x^2+y^2+z^2=0$$

$$3x^2+2y^2+z^2=0.$$

Найти dx и dy.

<u>Ответ:</u> $dx=\frac{zdz}{5x}$; $\quad dy=-\frac{4zdz}{5y}$

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

<u>Ответ:</u> $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$.

5) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$

Найти:

$$\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

<u>Ответ:</u> $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{p}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{q}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{p};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{q}.$$

6) Функция z от x и y задана уравнением

$$2x^2-y^2+4z^2=47.$$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$

при $\quad x=2;\ \ y=5;\ \ z=4.$

<u>Ответ:</u> $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{4}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{5}{16}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{9}{64};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{5}{256};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{39}{1024}.$$

7) Функция z от x и y задана уравнением

$$x^2+4y-3z^2=1.$$

Найти dz и d^2z при $x=1$, $y=3$, $z=2$.

<u>Ответ:</u>

$$dz = \frac{1}{6}\,dx + \frac{1}{3}\,dy.$$

$$d^2z = \frac{11}{72}\,dx^2 - \frac{1}{18}\,dx\,dy - \frac{1}{18}\,dy^2.$$

§ 45. *Maxima и minima.*

I. *Maxima* и *minima* функций от одной переменной независимой.

Мы уже умеем во многих случаях находить *maxima* и *minima* функций от одной независимой переменной. Однако, более полное исследование вопроса может быть проведено с помощью формулы Тэйлора, с которой мы только недавно познакомились. Поэтому вернемся к этому вопросу сейчас и рассмотрим его несколько подробнее.

Мы говорим, что функция $y=f(x)$ достигает в точке x_0 максимума, в том случае, когда разность $f(x_0+h)-f(x_0)$, отрицательна при любых достаточно малых по абсолютной величине, как положительных, так и отрицательных h ; и что функция $y=f(x)$ достигает в этой точке минимума, когда эта разность при любых достаточно малых по абсолютной величине h ,как положительных, так и отрицательных, положительне.

Если же эта разность не сохраняет постоянного знака при различных h , то функция не имеет в данной точке ни максимума, ни минимума. Исходя из этого, выведем необходимые и достаточные условия того, чтобы функция имела в данной точке *extremum*.

Пусть функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ определена и имеет непрерывные производные какого угодно порядка, тогда к этой функции можно применить формулу Тэйлора. По формуле Тэйлора имеем:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)=$$

$$=h\left[f'(x_0)+\frac{h}{2!}f''(x_0+\theta h)\right],\quad \text{где}\ \theta<\theta<1.$$

Если $f'(x_0)$ не равно нулю, то всегда можно выбрать h настолько малым по абсолютной величине, чтобы $\frac{h}{2}f''(x_0+\theta h)$ было по абсолютной величине меньше чем $f'(x_0)$; тогда выражение в квадратных скобках сохраняет один и тот же знак при положительных и отрицательных h. При этом сама разность $f(x_0+h)-f(x_0)$ будет, очевидно, менять свой знак при изменении знака h, и в этой точке не будет ни максимума, ни минимума.

Отсюда следует, что необходимым условием существования максимума или минимума в точке, где $x=x_0$, является равенство $f'(x_0)=0$.

Но это условие отнюдь не является достаточным, т.е. оно может выполняться, но функция в этой точке не будет иметь ни максимума, ни минимума, как это будет ясно из дальнейшего исследования.

Предположим теперь, что $f'(x_0)=0$.

Возьмем формулу Тэйлора в таком виде:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h),$$

если $f'(x_0)=0$, то

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h)=$$

$$=\frac{h^2}{2!}\left[f''(x_0)+\frac{h}{3}f'''(x_0+\theta h)\right].$$

Рассуждая по предыдущему, мы убедимся, что если $f''(x_0)$ не равно нулю, то можно подобрать h настолько малым по абсолютной величине, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках, сохраняло постоянный знак при различных по знаку h ; а именно - это выражение будет иметь тот же знак, что и число $f''(x_0)$.

Так как h^2 при различных h сохраняет знак плюс, то в этом случае разность $f(x_0+h)-f(x_0)$ также сохраняет один и тот же знак при различных h ; если $f''(x_0)$ положительно, то и разность эта положительна, и функция в данной точке имеет минимум. Если же $f''(x_0)$ отрицательна, то и разность $f(x_0+h)-f(x_0)$ отрицательна, и функция в данной точке имеет максимум.

Что же будет в том случае, когда одновременно и

$$f'(x_0)=0 \quad и \quad f''(x_0)=0\ ?$$

Чтобы решить этот вопрос, мы напишем формулу Тэйлора так:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+$$

$$+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0+\theta h).$$

Так как $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0$, то

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0+\theta h)=$$

$$=\frac{h^3}{3!}\left[f'''(x_0)+\frac{h}{4}f^{(4)}(x_0+\theta h)\right].$$

При помощи рассуждений, совершенно аналогичных тем, которые были проведены раньше на стр. 160 , убедимся, что в этом случае разность $f(x_0+h)-f(x_0)$ не сохраняет постоянного знака при различных h ; и следовательно, если $f'''(x_0)=0$, функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума.

Продолжая наше исследование таким же образом дальше, мы убедимся, что если $f'(x_0)=0$; $f''(x_0)=0$; $f'''(x_0)=0$, но $f^{(4)}(x_0)\neq 0$, то функция будет иметь максимум в этой точке, когда $f^{(4)}(x_0)$ отрицательна, и минимум, когда $f^{(4)}(x_0)$ положительна, и т.д.

Резюмируя все сказанное, можно сформулировать следующую теорему:

Если первая, не обращающаяся в данной точке в нуль, производная четного порядка, то функция в этой точке имеет максимум, когда эта производная в данной точке отрицательна и минимум, когда эта производная в данной точке положительна. Если же первая, не обращающаяся в данной точке в нуль, производная нечетного порядка, то функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума.

Пример. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y=6x^5+15x^4-80x^3-100.$$

Находим
$$y'=30x^4+60x^3-240x^2=$$
$$=30x^2(x^2+2x-8).$$

Приравниваем y' нулю:

$$30x^2(x^2+2x-8)=0.$$

Откуда: либо $x^2+2x-8=0$, либо $x=0$.

Следовательно: $x_1=2$; $x_2=-4$; $x_3=0$.

Найдем теперь $y''=f''(x)$.

$$y''=120x^3+180x^2-480x=$$
$$=60(2x^3+3x^2-8x).$$

Подставляя сюда найденные значения x, находим:

$$f''(x_1)=f''(2)=60.\ 12>0.$$

Следовательно, при $x=2$ функция имеет минимум.

Этот минимум равен:

$$f(2) = -308$$

$$f''(x_2) = f''(-4) = -60.48 < 0.$$

Следовательно, при $x = -4$, функция имеет максимум. Этот максимум равен $f(-4) = 2716$.

$$f''(x_3) = f''(0) = 0.$$

Для x_3 требуется дальнейшее исследование.

Ищем $f'''(x) = 60(6x^2 + 6x - 8)$.

Так как $f'''(0) = -60.8 \neq 0$, то при $x=0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

2. *Maxima* и *minima* неявной функции от одной переменной независимой.

Пусть функция y от одной независимой переменной задана неявно уравнением $f(x, y) = 0$.

Для разыскания максимума и минимума функции необходимо вычислить ее производные.

Дифференцируем по правилу дифференцирования неявных функций

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \qquad (1)$$

Откуда:

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Исключим из рассмотрения тот случай, когда

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Функция может иметь максимум или минимум только в такой точке, где $y' = 0$ или $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$

Откуда $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0.$

Решая совместно уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad \text{и} \qquad f(x,y)=0,$$

мы найдем те значения x и y, при которых функция может достигать максимума или минимума.

Для дальнейшего исследования мы, согласно изложенному выше, должно вычислить y''. Дифференцируем равенство (I):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0.$$

Так как нас интересуют знаки второй производной в тех точках, где $y'=0$, то мы полагаем здесь $y'=0$; тогда получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0,$$

Откуда:

$$y''=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

В это выражение для y'' подставляем те значения x и y, которые обращает y' в нуль. Если при этом получится положительное число, значит данное значение x соответствует минимуму функции и данное значение y есть минимальное значение функции; если получится отрицательное число, значит имеем максимум и, наконец, если вторая производная обратится в нуль, вычисляем производную третьего порядка и т.д.

Пример I. Найти максимум и минимум функции y, заданной уравнением:

$$y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0$$

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - 2xy).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - x^2)$$

Решаем систему:

$$y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0$$
$$x(x - 2y) = 0.$$

I) $x = 0; \quad y^3 - 3 = 0; \quad y = \sqrt[3]{3}.$

Решение: $x_1 = 0; \quad y_1 = \sqrt[3]{3}.$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\sqrt[3]{9}.$$

2) $x = 2y; \quad y^3 - 12y^3 + 8y^3 - 3 = 0; \quad y^3 + 1 = 0.$

$y^3 = -1; \quad y = -1; \quad x = 2y = -2.$

Решение: $x_2 = -2; \quad y_2 = -1.$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -9.$$

Исследуем теперь каждое из полученных решений:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(x - y).$$

Подставляем первое решение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6\sqrt[3]{3}; \quad y'' = -\frac{-6\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{9}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} > 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ имеем минимум $y_{min} = \sqrt[3]{3}.$

Подставляем второе решение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6; \quad y'' = -\frac{-6}{-9} = -\frac{2}{3} < 0.$$

так, что при $x=-2$ имеем максимум $y_{max} = -1$.

Пример 2. Найти максимум и минимум функции y, определяемой уравнением:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0; \quad a > 0.$$

Имеем $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2+y^2) - 4a^2x =$

$$= 4x(x^2+y^2-a^2).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2+y^2) + 4a^2y = 4y(x^2+y^2+a^2).$$

Решаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0 \\ x(x^2+y^2-a^2) = 0. \end{array} \right. \qquad (2)$$

Из второго уравнения имеем либо I) $x=0$, либо 2) $x^2+y^2-a^2=0$.

Подставляя $x=0$ в первое уравнение, найдем:

$$y^4 + 2a^2y^2 = 0.$$

Откуда: либо $y=0$; либо $y^2+2a^2=0$.

Второе уравнение дает для y мнимые значения, а поэтому мы их отбрасываем. Итак, решение I) дает

$$x=0; \quad y=0.$$

Берем теперь решение (2). Из него находим

$$y^2 = a^2 - x^2 \qquad (3)$$

Подставляя в первое из уравнений (2), получим

$$a^4 - 2a^2(2x^2 - a^2) = 0. \quad 3a^4 - 4a^2x^2 = 0.$$

Откуда $x_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$; а тогда из (3) получаем подставляя x_1: $y_1 = \frac{a}{2}$; $y_2 = -\frac{a}{2}$, и подставляя x_2: $y_3 = \frac{a}{2}$; $y_4 = -\frac{a}{2}$.

Следовательно, имеем следующие системы решений:

1) $x = 0$ 2) $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ 3) $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$y = 0.$ $y = \frac{a}{2}$ $y = -\frac{a}{2}$

4) $x = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$ 5) $x = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$y = \frac{a}{2}$ $y = -\frac{a}{2}.$

Подставим теперь наши решения в выражение для $\frac{\partial f}{\partial y}$ и получим:

1) $\frac{\partial f}{\partial y} = 0;$ 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 4a^3 \neq 0;$ 3) $\frac{\partial f}{\partial y} = -4a^3 \neq 0.$

4) $\frac{\partial f}{\partial y} = 4a^3 \neq 0;$ 5) $\frac{\partial f}{\partial y} = -4a^3 \neq 0.$

Так как первое решение дает:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

то отбрасываем его. Остальные решения исследуем дальше

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 - a^2).$$

Второе решение дает: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6a^2.$

$$y'' = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{6a^2}{4a^3} = -\frac{3}{2a} < 0.$$

Следовательно, имеем максимум.

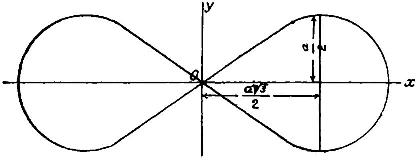
Третье решение дает:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6a^2; \quad y'' = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{6a^2}{-4a^3} = \frac{3}{2a} > 0.$$

Значит, в этом случае имеем минимум.

Совершенно также убедимся, что четвертое решение дает максимум, а пятое решение дает минимум.

На черт.№ 119 приведен график функции y.



Черт. 119.

Примеры для упражнений.

I) Определить максимум и минимум функции y, заданной уравнением:

$$x^3+y^3-a^2x=0;\quad a>0.$$

Ответ: максимум при $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$;

минимум при $x=-\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

2) Исследовать на максимум и минимум функцию y, заданную уравнением

$$x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0.$$

Ответ: максимум $y=0$ при $x=1$,

минимум $y=-\frac{1}{2}$ при $x=\frac{1}{2}$.

3. *Maxima* и *minima* функций от нескольких переменных независимых.

Пусть нам дана функция u от несколько переменных независимых:

$$u = f(x, y, z, \ldots t).$$

Мы говорим, что для некоторой системы значений $x_0, y_0, z_0, \ldots t_0$ функция u имеет максимум, если разность:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z,\ \ldots t_0+\Delta t) - f(x_0, y_0, \ldots t_0)$$

отрицательна при всевозможных достаточно малых по абсолютной величине, как положительных, так и отрицательных.

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots \Delta t.$$

Если же эта разность

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z,\ \ldots t_0+\Delta t) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots t_0)$$

при всевозможных достаточно малых по абсолютной величине, как положительных, так и отрицательных $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots \Delta t$, положительна, то мы говорим, что функция u имеет для данной системы значений независимых переменных $x_0, y_0, z_0, \ldots t_0$ минимум.

Из сказанного ясно, что функция u имеет при данной системе значений независимых переменных экстремум тогда и только тогда, когда ее полное приращение Δu сохраняет постоянный знак при всевозможных, достаточно малых по абсолютной величине, как положительных, так и отрицательных значениях приращений независимых переменных.

Для исследования вопроса о максимуме и минимуме функций от нескольких переменных, нам необходимо воспользоваться формулой Тайлора для функций от нескольких переменных независимых.

В § 38 мы вывели формулу Тейлора для функций от одной переменной независимой. Один из видов этой формулы был:

$$\Delta u = du + \frac{d^2u}{2!} + \frac{d^3u}{3!} + \dots + \frac{d^{n-1}u}{(n-1)!} + \frac{d^n u_\theta}{n!}$$

Здесь все дифференциалы вычисляются в точке, где $x = x_0$, а последний дифференциал $d^n u_\theta$ вычисляется в точке $x = x_0 + \theta\Delta x$, где $0 < \theta < 1$.

Примем без доказательства, что эта формула справедлива и в том случае, когда u есть функция от нескольких переменных независимых[x]). Только под $d^n u_\theta$ уже будем подразумевать дифференциал функции u n-го порядка, вычисленный для значений независимых переменных

$x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y,\ z + \theta\Delta z$ и т.д.

Вернемся теперь к вопросу о максимуме и минимуме функций от нескольких переменных. Согласно сказанному раньше, мы должны исследовать вопрос, при каких условиях полное приращение Δu сохраняет один и тот же знак для всевозможных достаточно малых по абсолютной величине, как положительных, так и отрицательных значений приращений независимых переменных. Напишем формулу Тейлора, взяв $n = 2$

$$\Delta u = du + \frac{1}{2} d^2 u_\theta$$

Будем теперь считать $dx, dy, dz, \dots dt$ бесконечно малыми первого порядка малости; тогда если все частные производные по x, от функции u по $x, y, z, \dots t$ не обращаются одновременно в нуль, то и du будет бес-

---

x) Доказательство см. в книге И.А. Лурье "Начала анализа бесконечно малых", ч.II.

конечно малой первого порядка малости, а d^2u_θ будет величиной бесконечно малой второго порядка малости. Следовательно, если только du не равно нулю, знак Δu будет совпадать со знаком du. Но

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots \pm \frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

а это выражение не может, очевидно, сохранять постоянный знак при всевозможных значениях

$$dx, dy, dz, \ldots dt,$$

так как если все величины $dx, dy, dz, \ldots dt$ сразу изменят свои знаки на обратные, то изменится знак также и у du. Следовательно, в этом случае нет ни максимума, ни минимума. Отсюда следует теорема:

Для того, чтобы функция от нескольких переменных имела для данной системы их значений максимум или минимум, необходимо, чтобы для этой системы значений было

$du = 0$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots \pm \frac{\partial u}{\partial t}dt = 0. \qquad (4)$$

при бесконечно малых $dx, dy, dz, \ldots dt$.

Это условие можно переписать несколько иначе. Так как $dx, dy, dz, \ldots dt$ являются совершенно произвольными бесконечно малыми приращениями независимых переменных, то равенство (4) возможно только тогда, когда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \ldots \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

В самом деле; положив например

$$dx \neq 0; \; dy = 0; \; dz = 0 \ldots, \; dt = 0.$$

получим $\frac{\partial f}{\partial x}\,dx = 0$; Откуда $\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$

Точно также докажем, что

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0; \; \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ldots \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Мы имеем как раз столько уравнений, сколько независимых переменных. Решая эту систему, мы найдем те системы значений независимых переменных, при которых функция u может иметь максимум или минимум; но это не значит, что каждая из полученных нами систем значений соответствует максимуму или минимуму функции. Равенство $du = 0$, является необходимым условием того, чтобы функция имела максимум или минимум, но еще недостаточным. Это значит, что некоторые системы значений независимых переменных, которые обращают du в нуль, могут и не соответствовать максимуму или минимуму функции.

Решение вопроса о том, что именно будет для данной системы значений независимых переменных: максимум, минимум или ни то, ни другое - требует дальнейшего исследования. Напишем теперь формулу Тэйлора, полагая $n = 3$:

$$\Delta u = du + \frac{1}{2}\, d^2u + \frac{1}{3!}\, d^3u_\theta;$$

если $du = 0$, то $\Delta u = \frac{1}{2}\, d^2u + \frac{1}{3!}\, d^3u_\theta.$

Точно также, как и раньше, мы можем убедиться, что в данном случае знак Δu будет совпадать со знаком d^2u при бесконечно малых $dx, dy \ldots dt$.

Отсюда следует вторая теорема. Если для данной системы значений независимых переменных первый дифференциал функции равен нулю, а второй дифференциал функции сохраняет знак при всевозможных бесконечно малых приращениях независимых переменных, то функция имеет для этой системы значений максимум в том случае, когда второй дифференциал отрицателен, и имеет минимум, когда он положителен.

Если же первый дифференциал равен нулю, а второй дифференциал не сохраняет постоянного знака, то функция для данной системы значений независимых переменных не имеет ни максимума, ни минимума.

Если данная система значений независимых переменных обращает в нуль кроме первого также и второй дифференциал, то нужно обратиться к рассмотрению дифференциалов высших порядков. На подробном рассмотрении этого случая мы уже не будем останавливаться.

Пример. Найти maxima и minima функции:

$$u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 3(x^2 - 2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - 6x = 6(4y^2 - x).$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3(x^2 - 2y) = 0 \\ 6(4y^2 - x) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ 4y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем:

$$x = 4y^2;$$

Подставляя в первое, получим:

$$16y^4 - 2y = 0; \quad 2y(8y^3 - 1) = 0.$$

Отсюда получаем два вещественных решения:

1) $y_1=0$ $\quad$ 2) $y_2=\frac{1}{2}$

$x_1=0$ $\quad$ $x_2=1.$

Для окончательного решения вопроса, что дает каждое решение, вычисляем производные и дифференциал второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y.$$

Следовательно, $d^2u=6xdx^2-12dxdy+48ydy^2.$

Подставляя первое решение, получаем:

$$d^2u=-12dxdy.$$

Так как при изменении знака dx или dy дифференциал d^2u также меняет знак, то это решение не дает ни максимума, ни минимума.

Подставляем теперь второе решение:

$$d^2u=6dx^2-12dxdy+24dy^2=$$
$$=6(dx^2-2dxdy+4dy^2)=$$
$$=6[(dx-dy)^2+3dy^2].$$

Так как при любых dx и dy выражение $(dx-dy)^2$ неотрицательно (равно нулю или положительно), то d^2u сохраняет знак плюс при любых значениях dx и dy. Следовательно, второму решению $x=1$; $y=\frac{1}{2}$ соответствует минимум функции u.

$$u_{min}=0.$$

Есть один частный случай, когда существует простой способ определения знака второго дифференциала для всевозможных бесконечно малых приращений независимых переменных.

Это тот случай, когда u является функцией от двух переменных независимых: $u=f(x,y)$.

В этом случае

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\, dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Пусть мы желаем исследовать, какой знак будет у d^2u при некоторых частных значениях переменных $x=x_0$; $y=y_0$, которые обращают в нуль первый дифференциал функции u. Мы должны тогда подставить в выражения для:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

значения $x=x_0$ и $y=y_0$.

Обозначим результаты подстановки через A, B и C. Тогда нам надо будет исследовать знак трехчлена:

$$d^2u = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2$$

при бесконечно малых значениях dx и dy. Мы можем, очевидно, исключить из нашего рассмотрения случай, когда одновременно $dx=0$ и $dy=0$ так как тогда нет никакого приращения функции.

Предположим сначала, что $A\neq 0$. Тогда наш трехчлен можно представить в таком виде:

$$\frac{1}{A}(A^2dx^2 + 2ABdx\,dy + ACdy^2) =$$

$$= \frac{1}{A}(A^2dx^2 + 2ABdxdy + B^2dy^2 + AC\,dy^2 - B^2dy^2) =$$

$$= \frac{1}{A}\left[(Adx + Bdy)^2 + (AC - B^2)\,dy^2\right].$$

Теперь рассмотрим различные случаи:

1) $B^2 - AC < 0$; $AC - B^2 > 0$;

первое слагаемое в квадратных скобках или положительно или нуль, второе слагаемое вообще положительно. Значит в этом случае знак трехчлена всегда совпадает со знаком множителя $\frac{1}{A}$ или со знаком A, а следовательно, если $A>0$, имеем минимум, а если $A<0$, имеем максимум.

2) $B^2-AC>0$; или $AC-B^2<0$.

В этом случае трехчлен меняет знак при различных dx, dy.

В самом деле, при $dy=0$ и $dx\neq 0$, имеем $d^2u=Adx^2$, и при всяком dx знак d^2u будет совпадать со знаком A. Если же положим $dy=-\frac{A}{B}dx$, то $Adx+Bdy=0$ и $d^2u=\frac{1}{A}(AC-B^2)dy^2$,

а так как $AC-B^2<0$, то d^2u будет иметь знак противоположный знаку A. Отсюда следует, что при $B^2-AC>0$ не будет ни максимума, ни минимума.

Случай $B^2-AC=0$ требует дополнительных исследований, и поэтому мы его рассматривать не будем.

Рассмотрим теперь случай, когда $A=0$; очевидно, в этом случае

$$B^2-AC>0.$$

$$d^2u=2Bdxdy+Cdy^2=dy^2(2B\alpha+C).,$$

где положено $\alpha=\frac{dx}{dy}$. Меняя значения dx и dy можно, конечно, получить такие значения α, для которых $2B\alpha+C$ положительно и такие значения α, для которых это выражение отрицательно. Следовательно, в этом случае d^2y меняет знак при различных dx и dy и значит нет ни максимума, ни минимума.

Резюмируя все сказанное, можно сформулировать следующее правило. Для того, чтобы найти maxima и minima функции от двух переменных независимых $u=f(x,y)$, надо найти те значения независимых переменных, которые являются решением системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Для дальнейшего исследования вопроса подставляем эти значения в выражения для производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

результаты подстановки обозначим соответственно через A, B и C.

Тогда при $B^2 - AC < 0$ имеем максимум, если $A<0$, и имеем минимум, если $A>0$. При $B^2 - AC > 0$ данная система значений независимых переменных не дает ни максимума, ни минимума.

Пример I. Найти максимум и минимум функции

$$u = x^3 + y^3 - 9xy + 27.$$

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 3y = 0 \\ y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Подставляем в первое уравнение из второго $x = \frac{y^2}{3}$; получается

$$\frac{y^4}{9} - 3y = 0; \quad y^4 + 27y = 0.$$

$$y(y-3)(y^2 + 3y + 9) = 0,$$

откуда: $y_1=0$; $y_2=3$ а остальные корни мнимые.
Соответственные значения x будут: $x_1=0$; $x_2=3$.

Следовательно, имеем две системы решений:

1) $(0;0)$ и 2) $(3;3)$.

Вычисляем производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-9;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Подставляем в эти производные $x=0; y=0$. Найдем

$$A=0;\ B=-9;\ C=0,\ B^2-AC=81>0.$$

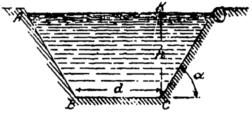
Следовательно, при $x=0; y=0$ функция не имеет ни максимума ни минимума. Подставляем теперь в выражения для производных второго порядка вторую систему решений:

$$x=3;\ y=3.$$

Получим: $A=18$; $B=-9$; $C=18$. $B^2-AC=81-324<0$, а так как при этом $A>0$, то функция при $x=3$ имеет минимум $u_{min}=0$.

Пример 2[x]). Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобедренную трапецию (черт. 120). Площадь сечения дана $(=P)$.

Определить условия, при которых "мокрый периметр" (периметр смоченный водой, от которого зависит трение и расходы по сооружению канала) был бы наименьшим.



Черт. 120.

---

x) Фихтенгольц." Математика для техников".

Обозначим угол откоса через α, глубину сечения через h, ширину основания через d и мокрый периметр через u. Тогд. получим

$$u = AB + BC + CD,$$

а так как

$$AB = CD = \frac{h}{\sin\alpha} \text{ и } BC = d,$$

то

$$u = d + \frac{2h}{\sin\alpha}.$$

Далее имеем

$$P = \frac{BC + AD}{2} h =$$

$$= (d + h \operatorname{Cotg}\alpha) h, \text{ так как}$$

$$AD = d + 2KD = d + 2h \operatorname{Cotg}\alpha.$$

Из выражения для P определяем d и подставляем в u; имеем

$$d + h \operatorname{Cotg}\alpha = \frac{P}{h}$$

$$d = \frac{P}{h} - h \operatorname{cotg}\alpha.$$

$$u = \frac{P}{h} - h \operatorname{cotg}\alpha + \frac{2h}{\sin\alpha},$$

$$u = \frac{P}{h} - \frac{h \cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{2h}{\sin\alpha}$$

$$u = \frac{P}{h} + \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha} h.$$

Таким образом u является функцией от двух независимых переменных h и α. Наименьшее значение этой функции нам и надо найти. Для этого поступаем по правилу, изложенному выше.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial h} = -\frac{P}{h^2} + \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\sin^2\alpha - (2-\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, h = \frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, h.$$

Приравниваем эти производные нулю.

$$\begin{cases} -\dfrac{P}{h^2} + \dfrac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0 \\ \dfrac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, h = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно h и α. Из второго уравнения имеем: либо $h=0$, либо $\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=0$; но при $h=0$, задача теряет смысл. Поэтому это решение отбрасываем.

Второе решение дает:

$$1-2\cos\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2},$$

откуда $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Подставляя это значение α в первое из уравнений, найдем

$$h^2 = \frac{P\sin\alpha}{2-\cos\alpha} = \frac{P\sqrt{3}}{3},$$

откуда $h = \sqrt{\frac{P\sqrt{3}}{3}}$

Вычислим теперь производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = \frac{2P}{h^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial h\,\partial\alpha}=\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}=\frac{2\sin^3\alpha-(1-2\cos\alpha)\,2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^4\alpha}h=$$

$$=\frac{2\sin^3\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+4\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}h=$$

$$=\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha+2\cos^2\alpha)}{\sin^4\alpha}h=$$

$$=2\,\frac{1-\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}h.$$

Подставляем в эти выражения вместо h и α их значения:

$$A=\frac{2P}{\sqrt{\left(\frac{P\sqrt{3}}{3}\right)^3}}=\frac{2P}{\sqrt{\frac{P^3\sqrt{27}}{27}}}=\frac{2P}{\frac{P}{3}\sqrt{P\sqrt{3}}}=\frac{6}{\sqrt{P\sqrt{3}}}.$$

$$B=0.$$

$$C=2\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{6}{\sqrt{P\sqrt{3}}}=\frac{32}{\sqrt{3P\sqrt{3}}}.$$

$$B^2-AC=-\frac{6}{\sqrt{P\sqrt{3}}}\cdot\frac{32}{\sqrt{3P\sqrt{3}}}<0.$$

Так как $A>0$, то при найденных значения h и α функция U имеет минимум

$$U_{min}=\frac{P}{\sqrt{\frac{P\sqrt{3}}{3}}}+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{P\sqrt{3}}{3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3P}{\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{3P\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{P\sqrt{3}}+\sqrt{P\sqrt{3}}=2\sqrt{P\sqrt{3}}.$$

Примеры для упражнений.

1) Найти maxima и minima функции:

$$u = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$$

Ответ: minimum при $x = \frac{17}{2}$; $y = -\frac{11}{2}$.

2) Исследовать на maxima и minima функцию

$$u = x^2 + xy + y^2 - ax - by.$$

Ответ: minimum при $x = \frac{1}{3}(2a - b)$, $y = \frac{1}{3}(2b - a)$.

3) Исследовать на maxima и minima функцию

$$u = xy(x + y - 1).$$

Ответ: minimum при $x = y = \frac{1}{3}$

4) Требуется изготовить из жести коробку без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда данной емкости v с наименьшей затратой материала. Каковы должны быть размеры коробки?

Ответ. Дно коробки квадратное со стороной $\sqrt[3]{2v}$; высота вдвое меньше стороны основания.

4[x]) Относительные maxima и minima.

Пусть нам дана функция от трех переменных: $u = f(x, y, z)$, причем еще дано, что эти переменные связаны двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= 0 \\ \varphi_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \qquad (5)$$

так что x, y и z уже не являются переменными независимыми, и требуется найти при этих условиях maxima и minima функции $u = f(x, y, z)$.

Такие maxima и minima называются относительными в отличие от абсолютных maxima и minima, которые функция u имеет в том случае, когда переменные

x) Этот пункт прорабатывается слушателями в порядке углубления.

x, y и z являются независимыми. Систему (5) можно решить относительно двух переменных, например y и z. Выразив эти переменные y и z через x и подставив их выражения в функцию u, мы получим функцию от одной переменной независимой x, максимум и минимум которой можно разыскать обычными способами. Но решение системы (5) иногда представляет собой довольно трудную задачу; вследствие этого на практике предпочитают пользоваться другими способами, к знакомству с которыми мы сейчас и перейдем. Функция u может иметь максимум или минимум в такой точке, где ее полный дифференциал du равен нулю. Мы знаем, что

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \qquad (6)$$

Так как y и z являются функциями переменной x, то дальше уже нельзя рассуждать попрежнему, т.е. нельзя уже считать dy и dz совершенно произвольными бесконечно малыми приращениями y и z; dy и dz можно выразить через dx. Для этого можно воспользоваться уравнениями (5); дифференцируя эти уравнения, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz = 0. \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Вместо того, чтобы решать эти уравнения относительно dy и dz и затем полученные выражения подставлять в (6), исключим из этих трех уравнений [(6) и (7)] dy и dz при помощи следующего искусственного приема: умножим левую часть первого из уравнений (7) на неопределенный пока множитель λ_1, левую часть второго из этих уравнений на неопределенный пока множитель λ_2 и прибавим полученные произведения к выражению для du, отчего последнее не изменится, так как:

$$\lambda_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}dz\right)=0.$$

и

$$\lambda_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}dz\right)=0.$$

Тогда получим:

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\lambda_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}dz\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}dz\right);$$

или, раскрывая скобки и собирая отдельно члены, содержащие dx, dy, dz:

$$du=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)dz.$$

Подберем теперь множители λ_1 и λ_2 так, чтобы коэффициенты при dy и dz обратились в нуль. Иными словами, положим:

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=0.$$

Тогда

$$du=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dx.$$

Максимум и минимум, очевидно, может быть в такой точке, где $du=0$ а так как x есть переменная независимая и dx есть произвольное приращение этой переменной, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0 \qquad (9)$$

Соединяя вместе уравнения (8), (9) и (5), получим систему

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=0.\\
&\qquad\varphi_1(x,y,z)=0\\
&\qquad\varphi_2(x,y,z)=0.
\end{aligned}\right. \qquad (10)$$

Эта система содержит пять уравнений с пятью неизвестными: $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$.

Следовательно, из этой системы можно определить все пять неизвестных. Решив эту систему, мы найдем множители λ_1 и λ_2, а также те значения переменных x, y, z, которым может соответствовать максимум или минимум функции $u=f(x,y,z)$. Чтобы легче запомнить эту систему заметим, что левые части первых трех уравнений представляют собой частные производные по x, y и z от новой вспомогательной функции

$$v=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2(x,y,z).$$

Чтобы составить эту функцию, надо умножить левую часть каждого из уравнений (5) на некоторый множитель λ и результаты сложить с данной функцией.

Чтобы решить окончательно вопрос, какие из найденных систем значений x,y,z соответствуют максимуму функции u, какие минимуму функции u, и какие не дают ни максимума, ни минимума, надо еще исследовать знак второго дифференциала для каждой из найденных систем значений.

Прежде всего заметим, что

$$du=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)dz=$$

$$=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=dv$$

т.е. $du=dv$, а следовательно $d^2u=d^2v$.

Условимся теперь для краткости обозначать

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\ \text{через}\ X$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\ \text{через}\ Y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\ \text{через}\ Z.$$

тогда

$$dv=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz \qquad (11)$$

При вычислении дифференциала второго порядка надо помнить, что независимой переменной является только x, а y и z являются функциями от x; а поэтому постоянным числом можно считать только dx, а dy и dz являются числами переменными. Приняв все это во внимание, получим:

$$d^2V = dx\,d\,\mathfrak{X} + dy\,d\,\overline{\mathfrak{Y}} + dz\,d\,\mathfrak{Z} + Y d^2 y + Z\,d^2 z\,.$$

Так как нас интересуют только значения d^2V при тех значениях переменных x, y, z которые получаются из уравнений (10), а в состав системы (10) входит система (8), то мы можем положить $Y=0$ и $Z=0$; тогда получим

$$d^2v = dx\,d\,\underline{\mathfrak{X}} + dy\,d\,\underline{\mathfrak{Y}} + dz\,d\,\mathfrak{Z}\,,$$

т.е. d^2V вычисляется, исходя из равенства (11) так, как если бы все переменные x, y и z были независимыми.

Чтобы узнать, какой знак будет иметь d^2V, надо из выражения для d^2V исключить dy и dz, а вместо $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ подставить по очереди все найденные выше решения системы (10).

Это можно сделать при помощи системы (7). Дальше можно рассуждать совершенно также, как при разыскании абсолютных *maxima* и *minima*. Если для всевозможных достаточно малых по абсолютной величине значений dx дифференциал d^2V или что то же, d^2u сохраняет знак плюс, имеем минимум. Если d^2V сохраняет знак минус, имеем максимум; если же d^2V меняет знак с изменением знака dx, то не будет ни максимума, ни минимума. Резюмируя, можно сказать следующее. Разыскание относительных *maxima* и *minima* функции $u=f(x,y,z)$ в том случае, когда переменные x, y, z связаны зависимостями

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

сводится к разысканию абсолютных *maxima* и *minima* функции

$$V=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z),$$

где λ_1 и λ_2 суть постоянные числа.

Совершенно также можно доказать более общую теорему, что разыскание относительных *maxima* и *minima* функции от u переменных

$$u=f(x_1,x_2,x_3\ldots x_u)$$

в том случае, когда эти переменные связаны m уравнениями $(m<u)$:

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)=0$$
$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)=0$$
$$\varphi_3(x,x_2,x_3,\ldots x_n)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)=0,$$

сводится к разысканию абсолютных *maxima* и *minima* функции

$$V=f(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,x_2,\ldots x_n)+\lambda_2\varphi_2(x_1,x_2,\ldots x_n)+$$
$$+\lambda_3\varphi_3(x_1,x_2,\ldots x_n)+\cdots+\lambda_m\varphi_m(x_1,x_2,\ldots x_n),$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m$ суть постоянные числа.

Пример I. Найти *maxima* и *minima* функции $u=xyz$ при условиях:

$$x+y+z=5 \qquad (12)$$
$$xy+xz+yz=8.$$

Составляем функцию V

$$V = xyz + \lambda_1(x+y+z-5) + \lambda_2(xy+xz+yz-8).$$

$$dv = \left[yz + \lambda_1 + \lambda_2(y+z)\right]dx + \left[xz + \lambda_1 + \lambda_2(x+z)\right]dy +$$
$$+\left[xy + \lambda_1 + \lambda_2(x+y)\right]dz.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2(y+z) = 0 \\ xz + \lambda_1 + \lambda_2(x+z) = 0 \\ xy + \lambda_1 + \lambda_2(x+y) = 0 \\ x+y+z = 5 \\ xy+xz+yz = 8. \end{cases}$$

Исключим из этих уравнений λ_1;

Для этого вычтем из первого уравнения сначала второе, а затем третье

$$yz - xz + \lambda_2(y-x) = 0.$$
$$yz - xy + \lambda_2(z-x) = 0.$$
$$x+y+z = 5$$
$$xy+xz+yz = 8.$$

Или

$$(y-x)(z+\lambda_2) = 0$$
$$(z-x)(y+\lambda_2) = 0$$
$$x+y+z = 5$$
$$xy+xz+yz = 8.$$

Из первых двух уравнений имеем четыре комбинации:

1) $y - x = 0$, $z - x = 0$ 2) $y - x = 0$, $y + \lambda_2 = 0$ 3) $z + \lambda_2 = 0$, $z - x = 0$ 4) $z + \lambda_2 = 0$, $y + \lambda_2 = 0.$

Или

$$1)\ x=y=z\ ;\quad 2)\ x=y=-\lambda_2$$

$$3)\ x=z=-\lambda_2\ ;\quad 4)\ y=z=-\lambda_2\ .$$

Первое решение надо отбросить, так как оно противоречит последним двум уравнениям. В самом деле: третье уравнение дает $3x=5$ и $x=\frac{5}{3}$, а четвертое уравнение дает $3x^2=8$ и $x=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Второе решение дает $y=x=-\lambda_2$.

$$\begin{cases} 2x+z=5 \\ x^2+2xz=8. \end{cases}$$

Определим из первого из этих уравнений z и подставим во второе

$$z=5-2x$$

$$x^2+10x-4x^2=8$$

$$3x^2-10x+8=0.$$

Откуда либо $x=2$ либо $x=\frac{4}{3}$; $z=5-2x$. Следовательно, $z=1$ или $z=\frac{7}{3}$; $y=x$; значит $y=2$ или $y=\frac{4}{3}$; $\lambda_2=-x$ и поэтому $\lambda_2=-2$; или $\lambda_2=-\frac{4}{3}$.

Наконец, для определения λ_1 подставляем найденные значения x, y, z и λ_2 в одно из уравнений (13), например в первое; найдем $\lambda_1=4$ или $\lambda_1=\frac{40}{3}$. Окончательно получаем два решения:

$$1)\ x=2;\ y=2;\ z=1;\ \lambda_1=4;\ \lambda_2=-2$$

$$2)\ x=\frac{4}{3};\ y=\frac{4}{3};\ z=\frac{7}{3};\ \lambda_1=\frac{40}{9};\ \lambda_2=-\frac{4}{3}.$$

Совершенно таким же путем найдем еще четыре решения

3) $x=2;\ y=1;\ z=2;\ \lambda_1=4;\ \lambda_2=-2$

4) $x=\frac{4}{3};\ y=\frac{7}{3};\ z=\frac{4}{3};\ \lambda_1=+\frac{40}{9};\ \lambda_2=-\frac{4}{3}.$

5) $x=1; \quad y=2; \quad z=2; \quad \lambda_1=4; \quad \lambda_2=-2$

6) $x=\frac{7}{3}; \quad y=\frac{4}{3}; \quad z=\frac{4}{3}; \quad \lambda_1=+\frac{40}{9}; \quad \lambda_2=-\frac{4}{3}.$

Для исследования полученных решений составляем d^2v

$$d^2v=(ydz+zdy+\lambda_2 dy+\lambda_2 dz)dx+$$
$$+(xdz+zdx+\lambda_2 dx+\lambda_2 dz)dy+$$
$$+(xdy+ydx+\lambda_2 dx+\lambda_2 dy)dz=$$
$$=2(y+\lambda_2)dx\,dz+2(z+\lambda_2)dy\,dx+2(x+\lambda_2)dydz.$$

Дифференциалы dx, dy, dz связаны уравнениями

$$dx+dy+dz=0$$
$$2xdx+2ydy+2zdz=0,$$

которые получаются от дифференцирования уравнений (I2).

Исследуем теперь первое решение

$$x=2; \quad y=2; \quad z=1; \quad \lambda_1=4; \quad \lambda_2=-2$$
$$d^2v=-2dx\,dy$$
$$dx+dy+dz=0$$
$$2dx+2dy+dz=0.$$

Вычитая из третьего уравнения второе, получим

$$dx+dy=0; \quad dy=-dx,$$

а значит

$$d^2v=2dx^2>0.$$

Следовательно, в этом случае имеем минимум функции $u=xyz$

$$u_{min}=2.2.1=4.$$

Исследуем второе решение

$$x=\frac{4}{3}; \quad y=\frac{4}{3}; \quad z=\frac{7}{3}; \quad \lambda_1=\frac{40}{9}; \quad \lambda_2=-\frac{4}{3}.$$

$$d^2v = 2\,dy\,dx.$$

$$dx + dy + dz = 0.$$

$$\frac{8}{3}dx + \frac{8}{3}dy + \frac{14}{3}dz = 0.$$

Или

$$dx + dy + dz = 0.$$

$$4dx + 4dy + 7dz = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на 7 и вычтем из него второе; получим $3dx + 3dy = 0$; $dy = -dx$.

$$d^2v = -2dx^2 < 0.$$

Значит, это решение соответствует максимуму функции u. Этот максимум равен

$$u_{max} = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3} = \frac{112}{27}.$$

Совершенно также можно убедиться, что третье и пятое решения соответствуют минимуму функции $u - u_{min} = 4$, а четвертое и шестое решения дают максимум функции u

$$u_{max} = \frac{112}{27}.$$

Пример 2. Найти кратчайшее расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Вместо того, чтобы искать минимум расстояния, можем искать минимум квадрата расстояния; следовательно, нам придется иметь дело с функцией

$$u = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

где переменные x, y, z связаны уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, так как точка с координатами x, y и z должна лежать на плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Точку (x, y, z) на плоскости надо определить из условия, чтобы u было наименьшим. Составляем вспомогательную функцию v:

$$V=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D);$$

ее дифференциал равен:

$$dV=[2(x-x_0)+\lambda A]dx+[2(y-y_0)+\lambda B]dy+$$
$$+[2(z-z_0)+\lambda C]dz.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} 2(x-x_0)+\lambda A=0 \\ 2(y-y_0)+\lambda B=0 \\ 2(z-z_0)+\lambda C=0 \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

Умножая первые три уравнения соответственно на A, B и C и складывая, получим

$$2Ax+2By+2Cz-2Ax_0-2By_0-2Cz_0+$$
$$+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0,$$

а так как из последнего уравнения имеем $Ax+By+Cz=-D$, то найдем:

$$-2D-2Ax_0-2By_0-2Cz_0+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0,$$

откуда

$$\lambda=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

Из первых трех уравнений тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=-\frac{1}{2}A\lambda \\ y-y_0&=-\frac{1}{2}B\lambda \\ z-z_0&=-\frac{1}{2}C\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Подставляя сюда полученное выражение для λ, найдем x, y и z, которые сами по себе для нас не интересны.

Составляем теперь второй дифференциал

$$d^2 v = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

так как $d^2 v > 0$ при любых dx, dy и dz, то имеем минимум функции u. Это значение u будет вообще наименьшим по сравнению со всеми значениями функции u, потому что на границах промежутка, т.е. при беспредельном возрастании переменных x и y данная функция беспредельно возрастает.

Из равенств (I4) находим

$$u_{min} = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \\ = \frac{1}{4} \lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2).$$

Подставляя найденное значение λ, получим:

$$u_{min} = \frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

а само расстояние будет корнем квадратным из этого числа, т.е.

$$\pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(Знак выбирается так, чтобы получилось положительное число).

Можно было, не вычисляя $d^2 v$, заключить по смыслу задачи, что мы здесь имеем минимум. В задачах с конкретным содержанием часто можно обойтись без вычисления второго дифференциала, а по смыслу задачи судить о том, что будет максимум или минимум.

Пример 3. Рассмотрим теперь одну задачу прикладного характера. Дан скрепленный цилиндр, состоящий из n слоев. Граничные радиусы, т.е. радиусы наружный и внутренний, равны r_1 и r_{n+1}. Радиусы слоев пусть будут:

$$r_2,\ r_3,\ r_4 \ldots\ldots r_i,\ r_{i+1},\ldots\ldots r_n.$$

Тогда, как доказывается в курсе "Сопротивление артиллерийских орудий" упругое сопротивление в том случае, когда оно расчитывается по тангенциальной деформации, равно

$$P_1 = \frac{3}{2} u_1 (y_1 y_2 \cdots y_{i-1} y_i \cdots y_{n-1} y_n - 1),$$

где u_1 некоторая постоянная величина, а $y_1 y_2 \ldots y_n$ суть функции от $r_1,\ r_2 \ldots r_n$

$$y_1 = \frac{3 r_2^2}{2r_2^2 + r_1^2}$$

$$y_2 = \frac{3 r_3^2}{2r_3^2 + r_2^2}$$

. . . .

. . . .

$$y_i = \frac{3 r_{i+1}^2}{2r_{i+1}^2 + r_i^2}$$

. . . .

$$y_n = \frac{3 r_{n+1}^2}{2r_{n+1}^2 + r_n^2}.$$

Найти условие для радиусов, при которых величина P_1 была наибольшей.[x)]

---

x) Проф. Дроздов "Сопротивление артиллерийских орудий и их устройство". Часть I, стр. 85-90.

Положим:

$$\frac{r_2}{r_1} = b_1 \; ;$$

$$\frac{r_3}{r_2} = b_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = b_i \qquad (15)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = b_n$$

Тогда

$$y_1 = \frac{3r_2^2}{2r_2^2 + r_1^2} = \frac{3\,\frac{r_2^2}{r_1^2}}{2\,\frac{r_2^2}{r_1^2} + 1} = \frac{3b_1^2}{1 + 2b_1^2}$$

Точно также:

$$y_2 = \frac{3b_2^2}{1 + 2b_2^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_i = \frac{3b_i^2}{1 + 2b_1^2} \qquad (16)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = \frac{3b_n^2}{1 + 2b_n^2} \; .$$

Обозначим еще отношение граничных радиусов $\frac{r_{n+1}}{r_1}$ через ρ; так как нам граничные радиусы даны, то ρ является числом данным. Перемножив почленно равенства (15), после сокращения получим

$$b_1 b_2 b_3 , \ldots b_i , \ldots b_n = \frac{r_{n+1}}{r_1} = \rho .$$

или $$b_1^2 b_2^2 b_3^3 \ldots . b_i^2, \ldots b_n^2 - \rho^2 = 0.$$

Этому условию подчинены величины
$$b_1^2,\ b_2^2,\ b_3^2, \ldots .\ b_i^2 \ldots \quad .\ b_n^2.$$
Обозначим теперь
$$b_1^2,\ b_2^2,\ b_3^2, \ldots .\ b_i^2 \ldots . .\ b_n^2$$
соответственно через
$$z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots . .\ z_i \ldots . .\ z_n;$$
так что
$$b_1^2 = z_1$$
$$b_2^2 = z_2$$
$$b_3^2 = z_3$$
$$\ldots . .$$
$$. . \quad . .$$
$$b_i^2 = z_i$$
$$\ldots \ldots$$
$$b_n^2 = z_n.$$

Выражение $y_1 y_2 y_3 \ldots y_i \ldots y_{n-1} y_n = \mathcal{F}$. является, очевидно, в силу равенств (16), функцией от чисел $z_1, z_2 \ldots z_i \ldots . z_n$, причем последние подчинены условию
$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_i \ldots z_n - \rho^2 = 0. \qquad (17)$$

Решение задачи, как видим, сводится к разысканию максимума функции
$$\mathcal{F} = y_1 y_2 y_3 \ldots y_i \ldots y_n$$
при условии (17), т.е. относительного максимума.

Вместо того, чтобы искать максимум функции
$$\mathcal{F} = y_1 y_2 y_3 \ldots . y_i \ldots . y_n$$
при условии $z_1 z_2 z_3 \ldots . z_i \ldots . z_n - \rho^2 = 0$,

можно искать максимум функции
$$W = \ln \mathcal{F} = \ln y_1 + \ln y_2 + \ln y_3 + \cdots + \ln y_i + \cdots + \ln y_n$$

при условии

$$\varphi = \ln z_1 + \ln z_2 + \dots + \ln z_i + \dots \ln z_n - \ln \rho^2 = 0.$$

Составляем функцию

$$v = W + \lambda \varphi .$$

$$\frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{\partial w}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dz_1} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} ;$$

Так как

$$y_1 = \frac{3z_1}{1+2z_1} ,$$

то

$$\frac{dy_1}{dz_1} = \frac{3(1+2z_1) - 6z_1}{(1+2z_1)^2} = \frac{3}{(1+2z_1)^2} .$$

Следовательно:

$$\frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{1}{y_1} \cdot \frac{3}{(1+2z_1)^2} + \frac{\lambda}{z_1} = \frac{3(1+2z_1)}{(1+2z_1)^2 3z_1} + \frac{\lambda}{z_1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{1}{z_1(1+2z_1)} + \frac{\lambda}{z_1} ,$$

точно также найдем

$$\frac{\partial v}{\partial z_2} = \frac{1}{z_2(1+2z_2)} + \frac{\lambda}{z_2}$$

. . . .

$$\frac{\partial v}{\partial z_i} = \frac{1}{z_i(1+2z_i)} + \frac{\lambda}{z_i}$$

. . . .

$$\frac{\partial v}{\partial z_n} = \frac{1}{z_n(1+2z_n)} + \frac{\lambda}{z_n}$$

Приравнивая каждую из этих производных нулю и умножая полученные уравнения соответственно на $z_1, z_2, z_3, \ldots z_i, \ldots z_n$, получим

$$\frac{1}{1+2z_1}+\lambda=0.$$

$$\frac{1}{1+2z_2}+\lambda=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1+2z_i}+\lambda=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1+2z_n}+\lambda=0.$$

Отсюда путем почленного вычитания найдем:

$$z_1=z_2=z_3=\ldots z_i=\ldots.\ z_n.$$

или

$$b_1=b_2=b_3=\ldots b_i=\ldots.\ b_n.$$

Для того, чтобы убедиться, что найденные значения $b_1, b_2, b_3 \ldots. b_n$ действительно соответствуют максимуму функции W, найдем d^2v.

Имеем:

$$dv=\frac{dy_1}{y_1}+\frac{dy_2}{y_2}+\frac{dy_3}{y_3}+\cdots+\frac{dy_i}{y_i}+\cdots+\frac{dy_n}{y_n}+$$

$$+\lambda\left(\frac{dz_1}{z_1}+\frac{dz^2}{z_2}+\cdots+\frac{dz_i}{z_i}+\cdots+\frac{dz_n}{z_n}\right).$$

При вычислении второго дифференциала надо принять во внимание, что $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ считаются переменными независимыми, а $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ являются функциями от $z_1 z_2, \ldots z_i, \ldots z_n$; поэтому $dy_1, dy_2, \ldots dy_i, \ldots dy_n$ являются переменными, а $dz_1, dz_2, \ldots dz_i, \ldots dz_n$ постоянными. Таким образом, получаем:

$$d^2v = \frac{y_1 d^2y_1 - dy_1^2}{y_1^2} + \frac{y_2 d^2y_2 - dy_2^2}{y_2^2} +$$

$$+ \frac{y_3 d^2y_3 - dy_3^2}{y_3^2} + \dots\dots + \frac{y_i d^2y_i - dy_i^2}{y_i^2} +$$

$$+ \dots\dots\dots + \frac{y_n d^2y_n - dy_n^2}{y_n^2} +$$

$$+ \lambda\left(- \frac{dz_1^2}{z_1^2} - \frac{dz_2^2}{z_2^2} - \frac{dz_3^2}{z_3^2} \dots - \frac{dz_i^2}{z_i^2} - \dots - \frac{dz_n^2}{z_n^2}\right),$$

Выше мы имели:

$$\frac{dy_1}{dz_1} = \frac{3}{(1+2z_1)^2}\text{; значит } dy_1 = \frac{dy_1}{dz_1}dz_1 = \frac{3dz_1}{(1+2z_1)^2}\text{;}$$

$$d^2y_1 = -\frac{12\,dz_1^2}{(1+2z_1)^3}\text{;}$$

а так как

$$z_1 = b_1^2 > 0;\quad y_1 = \frac{3z_1}{1+2z_1} > 0,\text{ то } d^2y_1 < 0;$$

$$y_1 d^2y_1 < 0;\quad y_1 d^2y_1 - dy_1^2 < 0:$$

$$\frac{y_1 d^2y_1 - dy_1^2}{y_1^2} < 0.$$

Точно также докажем, что все остальные слагаемые, входящие в состав d^2v вида

$$\frac{y_i d^2y_i - d\,y_i^2}{y_i^2}$$

отрицательны, а так как выражение в скобках, умноженное на λ также представляет собой отрицательную величину при любых ax_i, потому что

$$\lambda = -\frac{1}{1+2z_1} < 0$$

(см. уравнения (I8)), то d^2v отрицательно, и мы действительно имеем максимум.

Из условия $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots . b_n$ следует

$$y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_n .$$

Называя через b и y общие значения величин

$$b_1, b_2 \ldots b_n \quad \text{и} \quad y_1, y_2 \ldots y_n ,$$

будем иметь:

$$b_1 b_2 b_3 \ldots b_n = b^n = \rho$$

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_n = y^n = \mathcal{F}_{max}$$

$$y = \frac{3b^2}{1+2b^2} .$$

Следовательно:

$$b = \rho^{1/n} = \left(\frac{r_{n+1}}{r_1}\right)^{1/n}$$

$$\mathcal{F}_{max} = \left(\frac{3b^2}{2b^2+1}\right)^n = \left(\frac{3\rho^{2/n}}{2\rho^{2/n}+1}\right)^n .$$

Отсюда получается выражение для упругого сопротивления

$$P_1 = \frac{3}{2} u_1 \left[\left(\frac{3\rho^{2/n}}{2\rho^{2/n}+1}\right)^n - 1\right]$$

Равенства (I5) дают:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = \ldots \frac{r_{i+1}}{r_i} = \ldots \frac{r_{n+1}}{r_n} .$$

Следовательно, наивыгоднейшие радиусы слоев скрепленного цилиндра составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

Знаменатель прогрессии:

$$q = \rho^{1/n} = \left(\frac{r_{n+1}}{r_1}\right)^{1/n}.$$

Содержание.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ.

Страница.	Строка.	Напечатано.	Надо.
4	9 сн.	числа	члена
11	внизу страницы пропущено неравенство: $N>0$		
20	1 св.	герметрическая	геометрическая
24	в конце формулы (*) надо поставить многоточие.		
26	2 св.	знак	знак +
29	14 св.	$\pm\frac{1}{n}, \mp$	$\pm\frac{1}{n}, \ldots$
38	5 сн.	$xd,$	$dx,$
41	11 сн.	$u.$	$u,$
44	8 сн.	интегральной	интегральное
53	7 св.	$d\ \ x^2$	$dx^2.$
89	8 св.	$\frac{1}{5!}-\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{11}$
101	9 сн.	или	если
107	11 св.	пропущено и	
111	7 св.	dn	du
116	7 сн.	латинское a	русское а
117	1 сн.	латинское u	русское и
119	5 св.	примеры	пример
129	5 св.	$2ax^4$	$20x^4$
147	3 сн.	$-ax$	$-3ax$
160	6 сн.	$f(x_0)=0$	$f'(x_0)=0.$
166	8 сн.	(2)	2).
166	3 сн.	$x_1 : y_1=\frac{a}{2}$	$x_1 \ldots\ y_1=\frac{a}{2}$
166	2 сн.	$x_2 : y_3=\frac{a}{2}$	$x_2 \ldots\ y_3=\frac{a}{2}$
171	5 св.	$\pm\frac{\partial u}{\partial t}dt$	$+\frac{\partial u}{\partial t}dt$

Богомолов С.А. и др. вып.II.

Страница.	Строка	Напечатано	Надо
171	7 св.	$\pm \frac{\partial u}{\partial t} dt$	$+ \frac{\partial u}{\partial t} dt$
177	2 сн.	$y^4 + 27y$	$y^4 - 27y$
188	7 св.	u переменных	n переменных
188	8 св.	x_u	x_n
188	10 св.	$m < u$	$m < n$
195	1 сн.	была	была бы
196	7 сн.	$y_i = \frac{3 b_i^2}{1 + 2 b_1^2}$	$y_i = \frac{3 b_i^2}{1 + 2 b_i^2}$
197	1 св.	$b_1^2 b_2^2 b_3^3 \ldots b_i^2 \ldots b_n^2 - \rho^2 = 0;$	$b_1^2 b_2^2 b_3^2 \ldots b_i^2 \ldots b_n^2 - \rho^2 = 0$